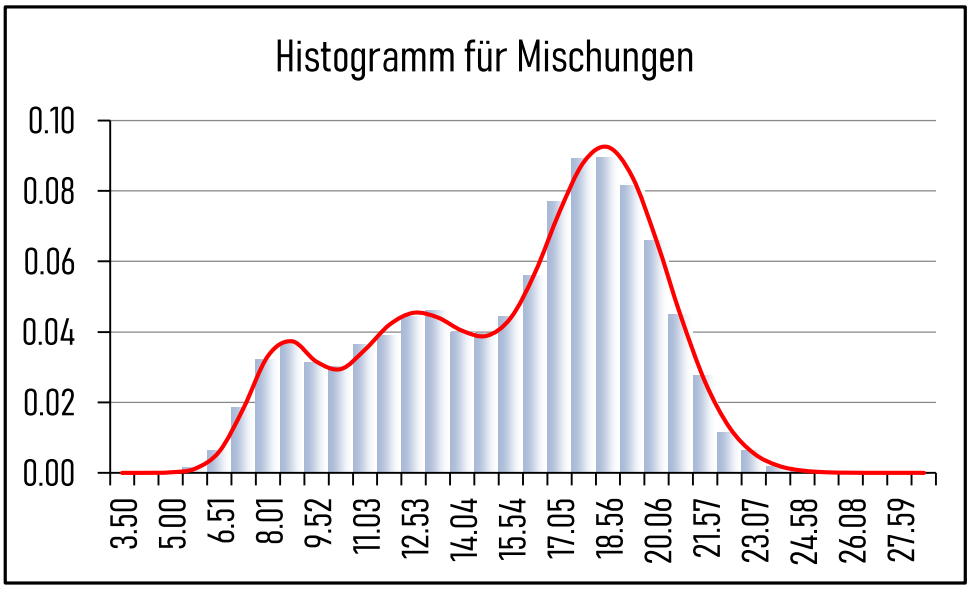
VBA-Funktionen für Wahrscheinlichkeitsverteilungen und mehr.

in OQM-Stat für Excel



Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Funktionen und Konstanten....1
1.1 Grad oder Rad....1
1.2 Winkel-Funktionen....1
1.3 Hyperbolicus-Funktionen....1
1.4 Gamma-Funktion....1
1.5 Ableitungen der Gammafunktion....2
1.6 Beta-Funktionen....2
1.7 Incomplete Beta- und Gamma-Funktionen....2
1.8 Error-Funktion....2
1.9 Sammlung spezieller Funktionen....3
2 Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen....4
2.1 Bernoulli-Verteilung....4
2.2 Binomial-Verteilung....5
2.3 Hypergeometrische Verteilung....6
2.4 Poisson-Verteilung....7
2.5 Geometrische Verteilung....8
2.6 Negative Binomial-Verteilung....9
2.7 Negative hypergeometrische Verteilung....10
2.8 Gamma-Poisson-Verteilung....11
2.9 Beta-Binomial-Verteilung....12
2.10 Beta negative Binomial-Verteilung....13
3 Prüfverteilungen....14
3.1 Standardisierte Normalverteilung NV(0, 1)....14
3.2 Studentsche t-Verteilung....15
3.3 Chi-Quadrat-Verteilung....16
3.4 F-Verteilung....17
4 Gamma- und Beta-Verteilungen....19
4.1 Gamma-Verteilung....19
4.1.1 Momente der Gamma-Verteilung....20
4.1.2 Schätzung der Parameter....20
4.1.3 Anpassungstest und AD-Optimierung....20
4.2 Beta-Verteilung....22
4.2.1 Momente der Beta-Verteilung....23
4.2.2 Schätzung der Parameter....23
4.2.3 Anpassungstest und AD-Optimierung....23
5 Familie der Normal-Verteilungen....24
5.1 Normalverteilung....24
5.1.1 Momente der Normalverteilung....24
5.1.2 Schätzung der Parameter....25
5.1.3 Anpassungstest auf Normalverteilung....25
5.2 Logarithmische Normalverteilung....26
5.3 Harmonische Normalverteilung....26
5.4 Powertransformation nach Box-Cox....26
5.4.1 Hin- und Rücktransformation....26
5.5 Johnson-Transformationen vom Typ SB....27
5.5.1 Standardfunktionen Johnson SB....27
5.5.2 Hin- und Rücktransformation Johnson SB....27

5.6 Johnson-Transformationen vom Typ SU....28
5.6.1 Standardfunktionen Johnson SU....28
5.6.2 Hin- und Rücktransformation Johnson SU....28
5.7 Schiefe Normalverteilung....29
5.7.1 Standardfunktionen für SND....29
5.7.2 Momente der SND....29
5.7.3 Schätzung der Parameter....29
5.8 Verallgemeinerte Normalverteilung....31
5.8.1 Standardfunktionen für GND....31
5.8.2 Momente der GND....31
5.8.3 Schätzung der Parameter....31
5.9 Gestutzte Normalverteilung....32
5.9.1 Standardfunktionen der gestutzten Normalverteilung....32
5.9.2 Momente der gestutzten Normalverteilung....32
5.9.3 Schätzung der Parameter....33
5.10 Gefaltete Normalverteilung (Betragsverteilung 1. Art)....34
5.10.1 Standardfunktionen der gefalteten Normalverteilung....34
5.10.2 Momente der gefalteten Normalverteilung....34
5.10.3 Schätzung der Parameter....34
5.11 Inverse Normalverteilung....36
5.11.1 Standardfunktionen der inversen Normalverteilung....36
5.11.2 Momente der inversen Normalverteilung....36
5.11.3 Schätzung der Parameter....36
5.12 Mischung von Normalverteilungen....37
5.12.1 Standardfunktionen der Mischung von Normalverteilungen....37
5.12.2 Momente der Mischung von Normalverteilungen....37
5.12.3 Schätzung der Parameter....37
6 Beidseitig begrenzte Verteilungen....38
6.1 Kumaraswamy-Verteilung....38
6.1.1 Standardfunktionen der Kumaraswamy-Verteilungen....38
6.1.2 Momente der Kumaraswamy-Verteilungen....38
6.1.3 Schätzung der Parameter....39
6.2 Uniform-Verteilung....40
6.2.1 Standardfunktionen der Uniform-Verteilungen....40
6.2.2 Momente der Uniform-Verteilungen....40
6.2.3 Schätzung der Parameter....40
6.3 Triangular-Verteilung....41
6.3.1 Standardfunktionen der Triangular-Verteilungen....41
6.3.2 Momente der Triangular-Verteilungen....41
6.3.3 Schätzung der Parameter....41
6.4 Uquadratic-Verteilung....43
6.4.1 Standardfunktionen der Uquadratic-Verteilungen....44
6.4.2 Momente der Uquadratic-Verteilungen....44
6.4.3 Schätzung der Parameter....44
7 Beidseitig offene Verteilungen....45
7.1 Cauchy-Verteilung....45
7.1.1 Standardfunktionen der Cauchy-Verteilung....45
7.1.2 Momente der Cauchy-Verteilungen....45
7.1.3 Schätzung der Parameter....45
7.2 Laplace-Verteilung....46

7.2.1 Standardfunktionen der Laplace-Verteilung....46
7.2.2 Momente der Laplace-Verteilungen....46
7.2.3 Schätzung der Parameter....47
7.3 Logistische Verteilung....47
7.3.1 Standardfunktionen der Logistic-Verteilung....47
7.3.2 Momente der Logistic-Verteilungen....47
7.3.3 Schätzung der Parameter....48
7.4 Maximum-Gumbel-Verteilung....49
7.4.1 Standardfunktionen der Maximum-Gumbel-Verteilung....49
7.4.2 Momente der Maximum-Gumbel-Verteilung....49
7.4.3 Schätzung der Parameter....49
7.5 Minimum-Gumbel-Verteilung....51
7.5.1 Standardfunktionen der Minimum-Gumbel-Verteilung....51
7.5.2 Momente der Minimum-Gumbel-Verteilung....51
7.5.3 Schätzung der Parameter....51
8 Extremwert-Verteilungen....53
8.1 Ein-Parameter-Fréchet-Verteilung....53
8.1.1 Standardfunktionen der Fréchet-Verteilung....53
8.1.2 Momente der Fréchet-Verteilung....53
8.1.3 Schätzung der Parameter....53
8.2 Drei-Parameter-Fréchet-Verteilung....55
8.2.1 Standardfunktionen der 3-Parameter Fréchet-Verteilung....55
8.2.2 Momente der 3-Parameter Fréchet-Verteilung....55
8.2.3 Schätzung der Parameter....55
8.3 Gumbel-Verteilung Typ 2....56
8.3.1 Standardfunktionen der Minimum-Gumbel-Verteilung....56
8.3.2 Momente der Minimum-Gumbel-Verteilung....56
8.3.3 Schätzung der Parameter....57
8.4 Exponentielle Gumbel-Verteilung Typ 2....58
8.4.1 Standardfunktionen der Exp. Gumbel-Verteilung Typ 2....58
8.4.2 Momente der Exp. Gumbel-Verteilung Typ 2....58
8.4.3 Schätzung der Parameter....58
8.5 Loglogistische Verteilung (Fisk-)....59
8.5.1 Standardfunktionen der LLO-Verteilung....59
8.5.2 Momente der LLO-Verteilung....59
8.5.3 Schätzung der Parameter....60
8.6 Burr-Verteilung Typ XII....60
8.6.1 Standardfunktionen der Burr XII-Verteilung....60
8.6.2 Momente der Burr XII-Verteilung....61
8.6.3 Schätzung der Parameter....61
8.7 Pareto-Verteilung....62
8.7.1 Standardfunktionen der Pareto-Verteilung....62
8.7.2 Momente der Pareto-Verteilung....62
8.7.3 Schätzung der Parameter....62
8.8 Erlang-Verteilung....63
8.8.1 Standardfunktionen der Erlang-Verteilung....63
8.8.2 Momente der Erlang-Verteilung....63
8.8.3 Schätzung der Parameter....64
9 Verallgemeinerte Verteilungen....65
9.1 Verallgemeinerte Extremwert-Verteilungen (GEV)....65

9.1.1 Standardfunktionen der GEV-Verteilung....65
9.1.2 Momente der GEV-Verteilung....65
9.1.3 Schätzung der Parameter....66
9.2 Verallgemeinerte Frechet-Verteilungen (GF)....67
9.2.1 Standardfunktionen der Frechet-Verteilungen (GF)....67
9.2.2 Momente der Frechet-Verteilungen (GF)....67
9.2.3 Schätzung der Parameter....68
9.3 Verallgemeinerte Logistic-Verteilungen (GLO)....69
9.3.1 Standardfunktionen der Logistic-Verteilungen (GLO)....69
9.3.2 Momente der Logistic-Verteilungen (GLO)....69
9.3.3 Schätzung der Parameter....70
9.4 Verallgemeinerte Loglogistic-Verteilungen (GLLO)....71
9.4.1 Standardfunktionen der Loglogistic-Verteilungen (GLLO)....71
9.4.2 Momente der Loglogistic-Verteilungen (GLLO)....71
9.4.3 Schätzung der Parameter....72
9.5 Verallgemeinerte Pareto-Verteilungen (GPA)....73
9.5.1 Standardfunktionen der Pareto-Verteilungen (GPA)....73
9.5.2 Momente der Pareto-Verteilungen (GPA)....73
9.5.3 Schätzung der Parameter....74
10 Lebensdauer-Verteilungen....75
10.1 Exponential-Verteilung [mit Shift]....75
10.1.1 Standardfunktionen der Exponential-Verteilung....75
10.1.2 Momente der Exponential-Verteilung....75
10.1.3 Schätzung des Parameters....76
10.2 Rayleigh-Verteilung [mit Shift]....77
10.2.1 Standardfunktionen der Rayleigh-Verteilung....77
10.2.2 Momente der Rayleigh-Verteilung....77
10.2.3 Schätzung der Parameter....78
10.3 Weibull-Verteilung (mit Shift)....79
10.3.1 Standardfunktionen der Weibull-Verteilung....79
10.3.2 Momente der Weibull-Verteilung....79
10.3.3 Schätzung der Parameter....80
10.4 Exponentiated Exponential-Verteilung....81
10.4.1 Standardfunktionen der Exponentiated Exponential-Verteilung....81
10.4.2 Momente der Exponentiated Exponential-Verteilung....81
10.4.3 Schätzung der Parameter....82
11 Statistische Tests....83
11.1 Anpassungstests für Wahrscheinlichkeitsverteilungen....83
11.1.1 Anderson-Darling-Test....83
11.1.2 Anpassungstests für die Normalverteilung....83
11.1.3 Anpassungstests für die Exponential- und Rayleigh-Verteilung....84
11.1.4 Anpassungstest für diskrete Verteilungen....84
11.2 Ausreißertests für Normalverteilungen....84
11.3 Unabhängigkeitstest....84
11.4 Fehleranteile und Konfidenzintervalle....85
11.5 Berechnung von Prozessfähigkeitsindizes....85
11.5.1 Berechnung notwendiger Parameter....86
11.5.2 Berechnung von Cp / Cpk....86
11.5.3 Berechnung von Pp / Ppk....86
11.6 Statistische Toleranzintervalle....87

11.7 Wichtige Ordnungs-Statistiken....87
11.8 Regression und Korrelation....88
11.8.1 Einfache lineare Regression und Korrelation....88
11.8.2 Orthogonale Regression....89
11.8.3 Residuenanalyse kritischer Cooks_D....89
11.8.4 Schätzwerte für DoE....89
11.8.5 Schätzwerte für Mischungen....89

1 Mathematische Funktionen und Konstanten

1.1 Grad oder Rad

In der Mathematik sind Grad (°) und Radiant (rad) die beiden gängigsten Einheiten zur Messung von Winkeln. Während das Gradmaß einen Vollkreis in 360 Einheiten unterteilt, basiert das Radiant (Bogenmaß) auf der Bogenlänge am Einheitskreis (Radius = 1).

Umrechnungsfunktionen Grad und Rad	
VT_Grad(x)	VT_Rad(x)

1.2 Winkel-Funktionen

Winkelfunktionen (Sinus, Kosinus, Tangens) sind grundlegende trigonometrische Funktionen, die Verhältnisse von Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck in Abhängigkeit eines Winkels beschreiben. Sie berechnen fehlende Winkel oder Seiten (Ankathete, Gegenkathete, Hypotenuse).

Winkelfunktionen	
VT_Sin(x)	VT_ASin(x)
VT_Cos(x)	VT_ACos(x)
VT_Tan(x)	VT_ATan(x)
VT_Cot(x)	VT_ACot(x)
VT_Sec(x)	VT_ASec(x)
VT_Csc(x)	VT_ACsc(x)

1.3 Hyperbolicus-Funktionen

Hyperbolische Funktionen (Sinus, Cosinus, Tangens, Kotangens, Sekans, Kosekans hyperbolicus) sind mathematische Kombinationen der Exponentialfunktionen. Sie beschreiben Kettenlinien, Physikszenarien wie Kabeldurchhänge und haben als Umkehrfunktionen die Areafunktionen.

Hyperbolicus-Funktionen	
VT_Sinh(x)	VT_ASinh(x)
VT_Cosh(x)	VT_ACosh(x)
VT_Tanh(x)	VT_ATanh(x)
VT_Coth(x)	VT_ACoth(x)
VT_Sech(x)	VT_ASech(x)
VT_Csch(x)	VT_ACsch(x)

1.4 Gamma-Funktion

Die Eulersche Gammafunktion, auch kurz Gammafunktion oder Eulersches Integral zweiter Gattung, ist eine der wichtigsten speziellen Funktionen und wird in den mathematischen Teilgebieten der Analysis und der Funktionentheorie untersucht. Sie wird heute durch ein Γ, den griechischen Großbuchstaben Gamma, bezeichnet und ist eine transzendente meromorphe Funktion mit der Eigenschaft $\Gamma(n) = (n - 1)!$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$, wobei mit ! die Fakultät bezeichnet wird. Die Gammafunktion erweitert also die Fakultätsfunktion auf nicht-natürliche Argumente, jedoch mit einer Verschiebung des Argu-

ments der Funktion um 1 im Vergleich mit der Fakultät. Genauer ist die Gammafunktion für alle komplexen Zahlen außer Null und den negativen ganzen Zahlen definiert.

Gamma-Funktionen (Fakultäten)	
VT_gamma(x)	VT_GammaLN(x)

1.5 Ableitungen der Gammafunktion

Die Ableitung der Gammafunktion Γ(x) lässt sich nicht durch einfache algebraische Funktionen ausdrücken. Die Ableitungen der Gammafunktion Γ(x) werden über die sogenannte Digamma-Funktion ψ(x) = Γ'(x) / Γ(x) ausgedrückt. Höhere Ableitungen führen zu den Polygammafunktionen $\psi^{(n)}(x)$. Die erste Ableitung ist auf der komplexen Ebene (außer bei nicht-positiven ganzen Zahlen) definiert.

Ableitungen der Gamma-Funktion	
VT_diGamma(x)	VT_trigamma(x)
VT_PHI2(x)	VT_PHI3(x)
VT_PHI4(x)	

1.6 Beta-Funktionen

Beta-Funktionen (Eulersche Integrale erster Art) sind mathematische Funktionen, die eng mit der Gammafunktion verknüpft sind. Sie finden Anwendung in Analysis, Statistik (z.B. Betaverteilung) und Physik.

Beta-Funktionen	
VT_Beta(A,B)	VT_BetaLN(A,B)

1.7 Incomplete Beta- und Gamma-Funktionen

Die incomplete Beta-Function ist eine Verallgemeinerung der Beta-Funktion. Sie wird vor allem in der Statistik als kumulative Verteilungsfunktion (CDF) der Beta-Verteilung verwendet.
Die unvollständige Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Gammafunktion, die entsteht, wenn man die Integrationsgrenzen der Standarddefinition einschränkt. Sie tritt häufig in der Statistik (z. B. bei der Gamma-Verteilung), der Physik und der analytischen Zahlentheorie auf.

Incomplete Beta- und Gammafunktion	
VT_incBetaP(A,B,x)	VT_incGammaP(A,x)

1.8 Error-Funktion

Die Fehlerfunktion ist eine spezielle mathematische Funktion, die vor allem in der Statistik, Wahrscheinlichkeitstheorie und bei physikalischen Diffusionsprozessen (wie der Wärmeleitung) vorkommt. Sie beschreibt die Fläche unter der Glockenkurve der Normalverteilung und wird verwendet, um Wahrscheinlichkeiten für Messfehler oder zufällige Abweichungen zu berechnen.

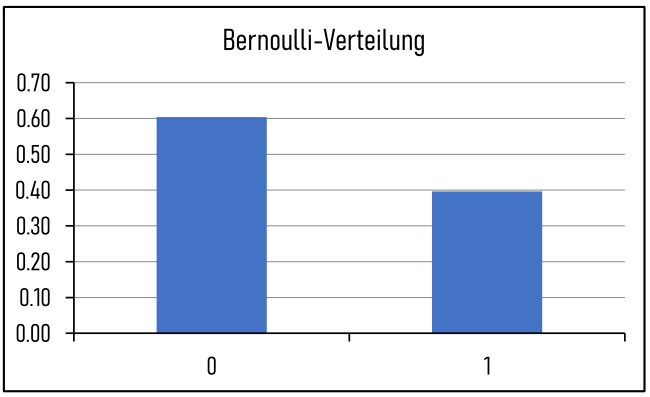
Error-Funktionen	
VT_erf(z)	VT_inverf(p)

1.9 Sammlung spezieller Funktionen

Konstanten	
VT_Euler()	VT_Pi()
Sigma-Korrektur in QRK	
VT_Korrektur_a(n)	
Logarithmierter Binomial-Koeffizient	
VT_CombLN(A,B)	
OwenT-Funktion	
OwenT(h, a)	

2 Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

2.1 Bernoulli-Verteilung

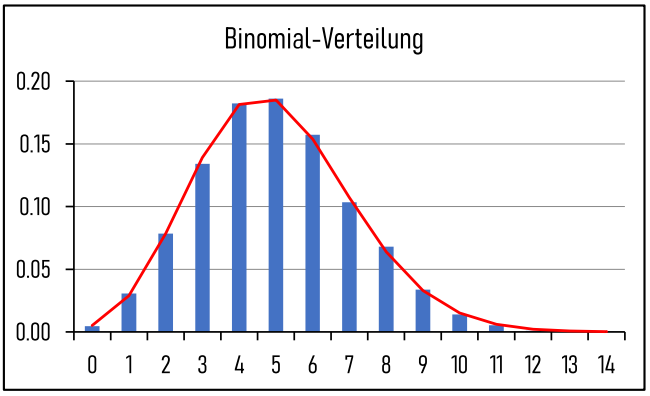


Zufallsvariablen mit einer Bernoulli-Verteilung (auch als Bernoullische Verteilung, Null-Eins-Verteilung, Alternativ-Verteilung oder Boole-Verteilung bezeichnet) benutzt man zur Beschreibung von zufälligen Ereignissen, bei denen es nur zwei mögliche Versuchsausgänge gibt. Einer der Versuchsausgänge wird meistens mit Erfolg bezeichnet und der komplementäre Versuchsausgang mit Misserfolg. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit p für einen Erfolg nennt man Erfolgswahrscheinlichkeit und q = 1 − p die Wahrscheinlichkeit eines Misserfolgs. Beispiele:

- Werfen einer Münze: Kopf (Erfolg), p = 1 / 2 und Zahl (Misserfolg), q = 1 / 2.
- Werfen eines Würfels, wobei nur eine „6“ als Erfolg gewertet wird: p = 1 / 6, q = 5 / 6.
- Betrachte sehr kleines Raum/Zeit-Intervall: Ereignis tritt ein (p ≳ 0), tritt nicht ein (q ≲ 1).

Bernoulli-Verteilung
VT_rand_Bernoulli(success_prob)
VT_MOM_Bernoulli_EW(success_probp)
VT_MOM_Bernoulli_VAR(success_prob)
VT_MOM_Bernoulli_SKEW(success_prob)
VT_MOM_Bernoulli_KURT(success_prob)

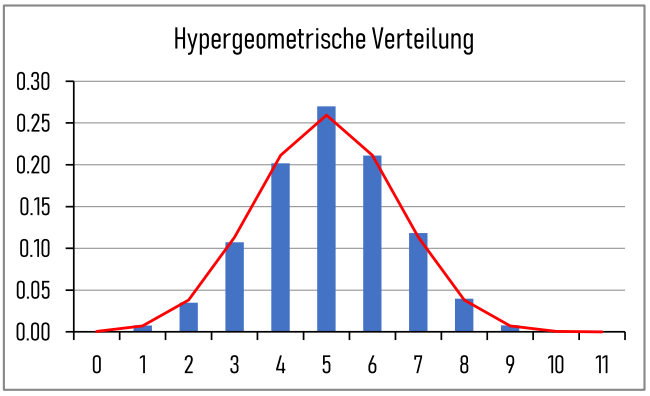
2.2 Binomial-Verteilung



Die Binomialverteilung ist eine der wichtigsten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Sie beschreibt die Anzahl der Erfolge in einer Serie von gleichartigen und unabhängigen Versuchen, die jeweils genau zwei mögliche Ergebnisse haben („Erfolg“ oder „Misserfolg“). Solche Versuchsserien werden auch Bernoulli-Prozesse genannt. Im Urnenmodell wird ein solcher Versuch als Ziehen mit Zurücklegen bezeichnet. Die Binomialverteilung und ihre Anwendungen sind: Qualitätskontrolle und Produktion (Wareneingangs- und Ausgangsprüfung), Wirtschaft und Management (Marktforschung), Medizin und Pharmazeutik (Klinische Studien), Alltag und Sport (Sportstatistik) und Naturwissenschaften und Technik (Übertragungsfehler).

Binomial-Verteilung
pmf_binomial(sample_size , successes , success_prob)
cdf_binomial(sample_size , successes , success_prob)
comp_cdf_binomial(sample_size , successes , success_prob)
crit_binomial(sample_size , success_prob , crit_prob)
comp_crit_binomial(sample_size , success_prob , crit_prob)
lcb_binomial(sample_size , successes , prob)
ucb_binomial(sample_size , successes , prob)
VT_rand_Binomial(success_prob , sample_size)
VT_MOM_Binomial_EW(success_prob , sample_size)
VT_MOM_Binomial_VAR(success_prob , sample_size)
VT_MOM_Binomial_SKEW(success_prob , sample_size)
VT_MOM_Binomial_KURT(success_prob , sample_size)

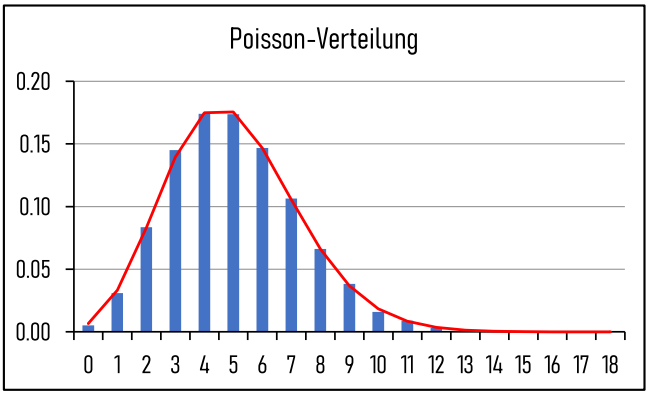
2.3 Hypergeometrische Verteilung



Die hypergeometrische Verteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung aus der Stochastik. Sie ist univariat und zählt zu den diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Einer dichotomen Grundgesamtheit werden in einer Stichprobe zufällig n Elemente ohne Zurücklegen entnommen. Die hypergeometrische Verteilung gibt dann Auskunft darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit in der Stichprobe eine bestimmte Anzahl von Elementen vorkommt, die die gewünschte Eigenschaft haben. Sie wird verwendet, um die Anzahl der Erfolge in einer Stichprobe zu berechnen, wenn man ohne Zurücklegen aus einer endlichen Grundgesamtheit zieht. Im Gegensatz zur Binomialverteilung ändert sich bei der hypergeometrischen Verteilung die Erfolgswahrscheinlichkeit mit jedem Zug, da entnommene Elemente nicht wieder in die Menge zurückgelegt werden. Bedeutung kommt dieser Verteilung daher etwa bei Qualitätskontrollen zu.

Hypergeometrische Verteilung
pmf_hypergeometric(type1s , sample_size , tot_type1 , pop_size)
cdf_hypergeometric(type1s , sample_size , tot_type1 , pop_size)
comp_cdf_hypergeometric(type1s , sample_size , tot_type1 , pop_size)
crit_hypergeometric(sample_size , tot_type1 , pop_size , crit_prob)
comp_crit_hypergeometric(sample_size , tot_type1 , pop_size , crit_prob)
lcb_hypergeometric(type1s , sample_size , pop_size , prob)
ucb_hypergeometric(type1s , sample_size , pop_size , prob)
VT_rand_Hypergeometric(sample_size , pop_size , tot_type1)
VT_MOM_HypGeo_EW(success_prob, sample_size)
VT_MOM_HypGeo_VAR(success_prob , sample_size , pop_size)
VT_MOM_HypGeo_SKEW(success_prob , sample_size , pop_size)
VT_MOM_HypGeo_KURT(success_prob , sample_size , pop_size)

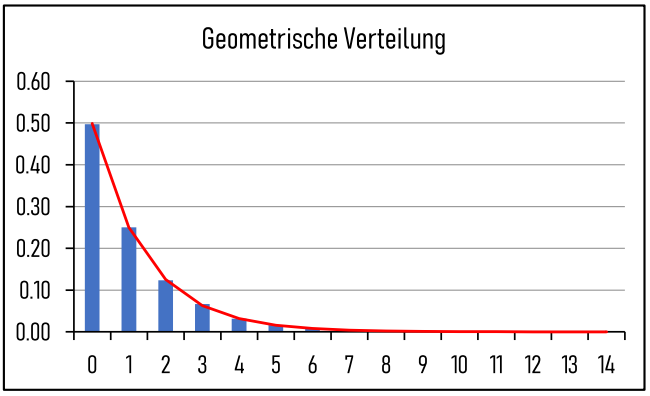
2.4 Poisson-Verteilung



Die Poisson-Verteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, die die Anzahl von unabhängigen Ereignissen modelliert, welche mit einer konstanten mittleren Rate (λ) in einem festen Zeit- oder Raumintervall auftreten. Sie ist ideal für seltene Ereignisse (z.B. Anrufe pro Stunde, Fehler pro Seite) und dient als Annäherung an die Binomialverteilung bei hoher Versuchszahl (n) und geringer Wahrscheinlichkeit (p).

Poisson-Verteilung
pmf_poisson(mean , i)
cdf_poisson(mean , i)
comp_cdf_poisson(mean , i)
crit_poisson(mean , crit_prob)
comp_crit_poisson(mean , crit_prob)
lcb_poisson(i , prob)
ucb_poisson(i , prob)
VT_rand_Poisson(mean)
VT_MOM_Poisson_EW(mean)
VT_MOM_Poisson_VAR(mean)
VT_MOM_Poisson_SKEW(mean)
VT_MOM_Poisson_KURT(mean)

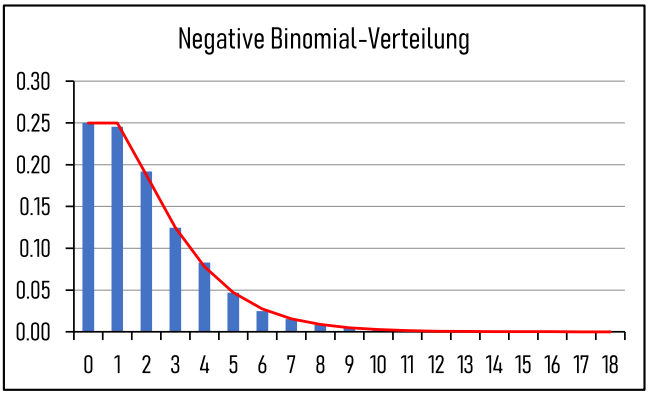
2.5 Geometrische Verteilung



Die geometrische Verteilung ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung aus der Statistik, die beschreibt, wie viele Versuche man braucht, bis ein bestimmtes Ereignis zum ersten Mal eintritt. Wichtige Merkmale sind: Die einzelnen Versuche müssen unabhängig voneinander sein (wie beim Würfeln oder Münzwerfen), die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg bleibt bei jedem Versuch gleich und die Gedächtnislosigkeit ist die spannendste Eigenschaft. Es ist egal, wie oft du schon verloren hast – die Chance, beim nächsten Wurf zu gewinnen, bleibt immer gleich groß. Die Vergangenheit beeinflusst die Zukunft nicht.

Geometrische Verteilung
pmf_geometric(failures , success_prob)
cdf_geometric(failures , success_prob)
comp_cdf_geometric(failures , success_prob)
crit_geometric(success_prob , crit_prob)
comp_crit_geometric(success_prob , crit_prob)
lcb_geometric(failures , prob)
ucb_geometric(failures , prob)
VT_rand_Geometric(success_prob)
VT_MOM_Geometric_EW(success_prob)
VT_MOM_Geometric_VAR(success_prob)
VT_MOM_Geometric_SKEW(success_prob)
VT_MOM_Geometric_KURT(success_prob)

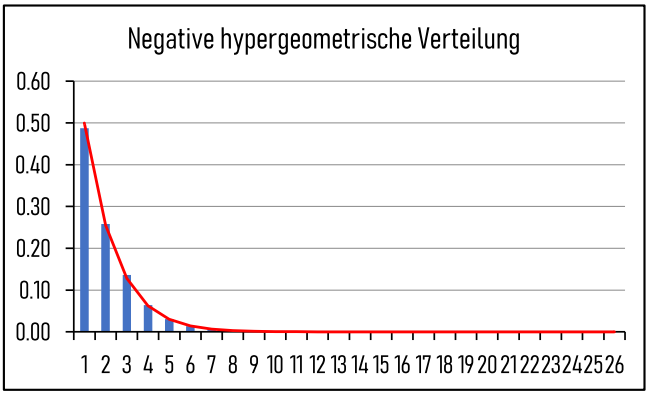
2.6 Negative Binomial-Verteilung



Die negative Binomialverteilung (auch Pascal-Verteilung) ist eine univariate Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie zählt zu den diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ist eine der drei Panjer-Verteilungen. Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Bernoulli-Prozess nach k Misserfolgen genau r Erfolge eingetreten sind. Neben der Poisson-Verteilung ist die negative Binomialverteilung die wichtigste Schadenzahlverteilung in der Versicherungsmathematik. Dort wird sie insbesondere als Schadenzahlverteilung in der Krankenversicherung benutzt, seltener im Bereich Kraftfahrzeug-Haftpflicht oder Kasko.

Negative Binomial-Verteilung
pmf_negbinomial(failures , success_prob , successes_reqd)
cdf_negbinomial(failures , success_prob , successes_reqd)
comp_cdf_negbinomial(failures , success_prob , successes_reqd)
crit_negbinomial(success_prob , successes_reqd , crit_prob)
comp_crit_negbinomial(success_prob , successes_reqd , crit_prob)
lcb_negbinomial(failures , successes_reqd , prob)
ucb_negbinomial(failures , successes_reqd , prob)
VT_rand_negBinomial(success_prob , successes_reqd)
VT_MOM_negBinomial_EW(success_prob , successes_reqd)
VT_MOM_negBinomial_VAR(success_prob , successes_reqd)
VT_MOM_negBinomial_SKEW(success_prob , successes_reqd)
VT_MOM_negBinomial_KURT(success_prob , successes_reqd)

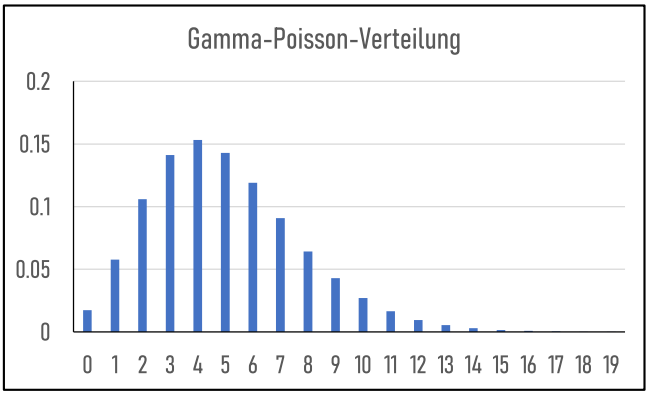
2.7 Negative hypergeometrische Verteilung



Die negative hypergeometrische Verteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Ziehungen, die benötigt werden, um eine festgelegte Anzahl an Erfolgen aus einer endlichen Grundgesamtheit ohne Zurücklegen zu erhalten. Während die normale hypergeometrische Verteilung die Anzahl der Erfolge bei einer festen Anzahl von Ziehungen zählt, ist bei der negativen hypergeometrischen Verteilung die Anzahl der benötigten Erfolge fest vorgegeben und die Stichprobengröße (Anzahl der Ziehungen) variabel.
Anwendungen sind typischerweise in der Qualitätskontrolle oder bei Stichprobenverfahren, wenn man wissen möchte, wie viele Prüfungen nötig sind, um eine bestimmte Menge an defekten (oder intakten) Teilen zu finden. In statistischen Analysen, beispielsweise bei Sprachuntersuchungen, wird sie auch zur Messung der Stabilität von Diskrepanzkoeffizienten in Textkorpora herangezogen.

Negative hypergeometrische Verteilung
pmf_neghypergeometric(type2s , type1s_reqd , tot_type1 , pop_size)
cdf_neghypergeometric(type2s , type1s_reqd , tot_type1 , pop_size)
comp_cdf_neghypergeometric(type2s , type1s_reqd , tot_type1 , pop_size)
crit_neghypergeometric(type1s_reqd , tot_type1 , pop_size , crit_prob)
comp_crit_neghypergeometric(type1s_reqd , tot_type1 , pop_size , crit_prob)
lcb_neghypergeometric(type2s , type1s_reqd , pop_size , prob)
ucb_neghypergeometric(type2s , type1s_reqd , pop_size , prob)
VT_rand_negHypergeometric(pop_size , tot_type1 , type1s_reqd)
VT_MOM_negHypGeo_EW(tot_type1 , type1s_reqd , pop_size)
VT_MOM_negHypGeo_VAR(tot_type1 , type1s_reqd , pop_size)
VT_MOM_negHypGeo_SKEW(tot_type1 , type1s_reqd , pop_size)
VT_MOM_negHypGeo_KURT(tot_type1 , type1s_reqd , pop_size)

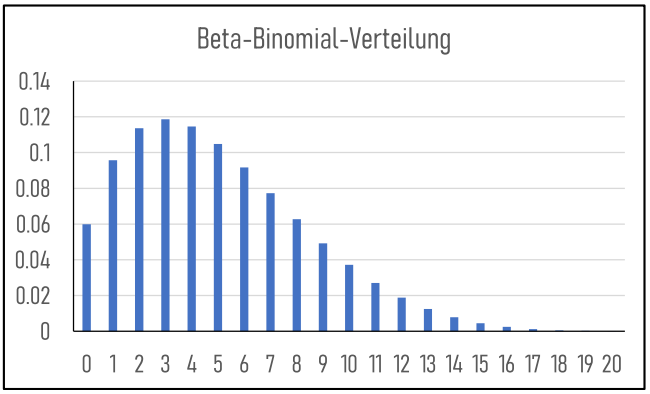
2.8 Gamma-Poisson-Verteilung



Die Gamma-Poisson-Verteilung (auch Gamma-Mischverteilung) ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die entsteht, wenn der Parameter λ einer Poisson-Verteilung selbst einer Gamma-Verteilung folgt. Sie beschreibt überdisperse Zähldaten und entspricht der Negativen Binomialverteilung. Häufig wird sie als konjugierte A-priori-Verteilung in der Bayes-Statistik genutzt. Die Poisson-Verteilung modelliert Ereignisse mit konstantem Erwartungswert λ. Variiert λ jedoch gemäß einer Gamma-Verteilung, entsteht die Gamma-Poisson-Verteilung.
Sie wird verwendet, wenn die Varianz von Zähldaten (z. B. Schadensfälle, Unfallzahlen) deutlich größer ist als ihr Mittelwert (Überdispersion). Die Mischung einer Poisson-Verteilung mit einer Gamma-Verteilung führt mathematisch auf eine Negative Binomialverteilung. In der Bayes-Inferenz ist die Gamma-Verteilung die konjugierte A-priori-Verteilung für den Parameter λ einer Poisson-Verteilung, was die Berechnung der A-posteriori-Verteilung vereinfacht.

Gamma-Poisson-Verteilung
pmf_GammaPoisson(i , gamma_shape , gamma_scale)
cdf_GammaPoisson(i , gamma_shape , gamma_scale)
comp_cdf_GammaPoisson(i , gamma_shape , gamma_scale)
crit_GammaPoisson(gamma_shape , gamma_scale , crit_prob)
comp_crit_GammaPoisson(gamma_shape , gamma_scale , crit_prob)

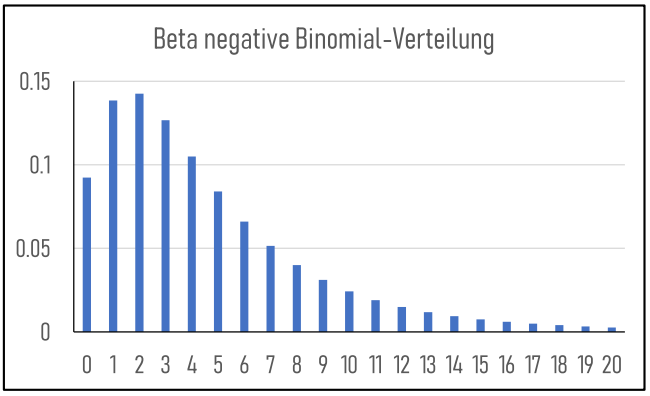
2.9 Beta-Binomial-Verteilung



Die Beta-Binomial-Verteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, die entsteht, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit p einer Binomial-Verteilung nicht fest ist, sondern selbst einer Beta-Verteilung folgt. Sie wird häufig in der Bayes-Statistik verwendet, um Überdispersion (höhere Varianz als erwartet) zu modellieren. Zuerst wird eine Erfolgswahrscheinlichkeit aus einer Beta(α, β)-Verteilung gezogen. Danach wird die Anzahl der Erfolge aus einer Binomial-Verteilung bestimmt.
In der Bayes-Statistik dient die Beta-Verteilung als konjugierte A-priori-Verteilung zur Binomial-Verteilung. Das bedeutet, wenn man Vorwissen als Beta-Verteilung ausdrückt und neue Daten (Erfolge/Misserfolge) hinzukommen, ist die aktualisierte (Posteriori-) Verteilung wieder eine Beta-Verteilung. Wenn Daten eine größere Streuung aufweisen, als eine einfache Binomial-Verteilung mit festem p zulassen würde (z.B. bei Krankheitsraten in verschiedenen Städten), fängt die Beta-Binomial-Verteilung diese zusätzliche Variabilität durch die Verteilung von p auf.
In klinischen Studien oder bei der Kreditrisikoanalyse wird die Verteilung genutzt, um Ausfallwahrscheinlichkeiten zu schätzen, wenn die Basiswahrscheinlichkeit zwischen verschiedenen Gruppen schwankt.

Beta-Binomial-Verteilung
pmf_BetaBinomial(i , sample_size , beta_shape1 , beta_shape2)
cdf_BetaBinomial(i , sample_size , beta_shape1 , beta_shape2)
comp_cdf_BetaBinomial(i , sample_size , beta_shape1 , beta_shape2)
crit_BetaBinomial(sample_size , beta_shape1 , beta_shape2 , crit_prob)
comp_crit_BetaBinomial(sample_size , beta_shape1 , beta_shape2 , crit_prob)

2.10 Beta negative Binomial-Verteilung

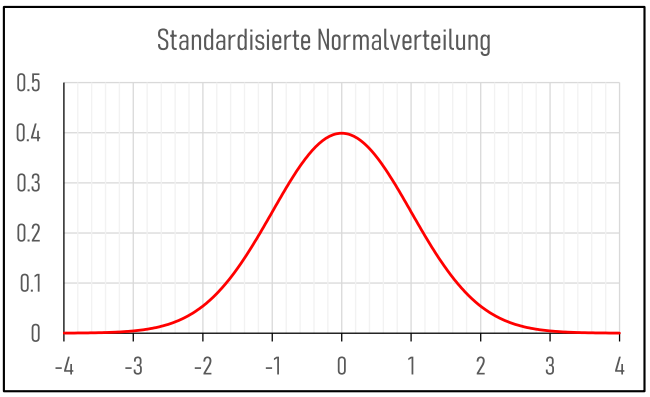


Die Beta-negative Binomialverteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, die die Anzahl der Misserfolge vor einer festen Anzahl von Erfolgen (r) modelliert, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit (p) selbst einer Beta-Verteilung folgt. Sie dient der Modellierung überdisperser Zähldaten, bei denen die Varianz den Mittelwert übersteigt.
Es handelt sich um eine zusammengesetzte Verteilung (Compound Distribution), bei der die Parameter der Beta-Verteilung (α, β) und die Anzahl der Erfolge (r) die Verteilung bestimmen. Sie findet Anwendung in Situationen, in denen die Wahrscheinlichkeit nicht konstant ist, sondern variiert. Sie ermöglicht eine flexiblere Modellierung der Varianz im Vergleich zur Standard-Negativ-Binomialverteilung.

Beta-negative Binomial-Verteilung
pmf_BetaNegativeBinomial(i , r , beta_shape1 , beta_shape2)
cdf_BetaNegativeBinomial(i , r , beta_shape1 , beta_shape2)
comp_cdf_BetaNegativeBinomial(i , r , beta_shape1 , beta_shape2)
crit_BetaNegativeBinomial(r , beta_shape1 , beta_shape2 , crit_prob)
comp_crit_BetaNegativeBinomial(r , beta_shape1 , beta_shape2 , crit_prob)

3 Prüfverteilungen

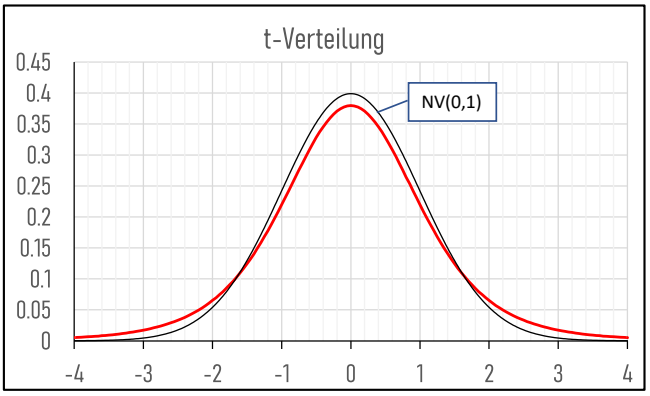
3.1 Standardisierte Normalverteilung NV(0, 1)



Die standardisierte Normalverteilung, bezeichnet als NV(0, 1), ist ein Spezialfall der Normalverteilung mit einem Mittelwert (Erwartungswert) von $\mu = 0$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 1$. Sie dient dazu, normalverteilte Daten durch z-Transformation [$z = (x - \mu) / \sigma$] vergleichbar zu machen und Wahrscheinlichkeiten mittels tabellierter Werte zu bestimmen.
Die Form der Dichtefunktion ist symmetrisch zur y-Achse, mit dem Maximum bei 0. Es können beliebige Normalverteilungen durch die Transformation in die Standardnormalverteilung überführt werden. Wahrscheinlichkeiten (Flächen unter der Kurve) werden üblicherweise aus einer Tabelle der Standardnormalverteilung (z-Tabelle) abgelesen. Die pdf-, cdf-, und die inv-Funktionen ersetzen alle Tabellen.

standardisierte Normalverteilung NV(0, 1)
pdf_normal(x)
cdf_Normal(x)
inv_normal(prob)
RandNorm(Optional mean = 0, Optional Dev = 1)
standardisierte Normalverteilung NV(0, 1) für Orderstatistik
pdf_normal_os(x , Optional n = 1, Optional r = -1)
cdf_normal_os(x , Optional n = 1, Optional r = -1)
comp_cdf_normal_os(x , Optional n = 1, Optional r = -1)
inv_normal_os(p , Optional n = 1, Optional r = -1)
comp_inv_normal_os(p , Optional n = 1, Optional r = -1)

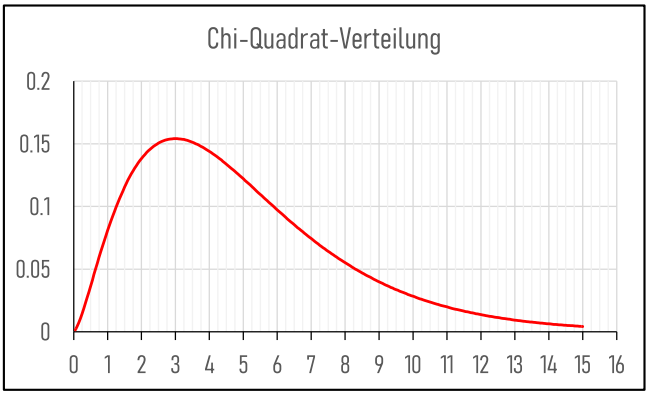
3.2 Studentsche t-Verteilung



Die studentsche t-Verteilung (auch Student-t-Verteilung oder kurz t-Verteilung) ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die 1908 von William Sealy Gosset entwickelt und nach seinem Pseudonym Student benannt wurde. Gosset hatte festgestellt, dass die standardisierte Schätzfunktion des Stichproben-Mittelwerts normalverteilter Daten nicht mehr normalverteilt, sondern t -verteilt ist, wenn die zur Standardisierung des Mittelwerts benötigte Varianz des Merkmals unbekannt ist und mit der Stichprobenvarianz geschätzt werden muss. Seine t-Verteilung erlaubt – insbesondere für kleine Stichprobenumfänge – die Berechnung der Verteilung der Differenz vom Mittelwert der Stichprobe zum wahren Mittelwert der Grundgesamtheit.
Die t-Werte hängen vom Signifikanzniveau sowie von der Stichprobengröße n ab und bestimmen das Vertrauensintervall und damit die Aussagekraft der Schätzung des Mittelwertes. Die t-Verteilung wird mit wachsendem n schmaler und geht für $n \to \infty$ in die Standardnormalverteilung über. Hypothesentests, bei denen die t-Verteilung Verwendung findet, bezeichnet man als t-Tests.

zentrale t-Verteilung
pdf_tdist(x , df)
cdf_tdist(x , df)
inv_tdist(prob , df)
VT_rand_t(df)
nicht-zentrale t-Verteilung
pdf_t_nc(x , df , nc_param)
cdf_t_nc(x , df , nc_param)
comp_cdf_t_nc(x , df , nc_param)
inv_t_nc(prob , df , nc_param)
comp_inv_t_nc(prob , df , nc_param)
ncp_t_nc(prob , x , df)
comp_ncp_t_nc(prob , x , df)

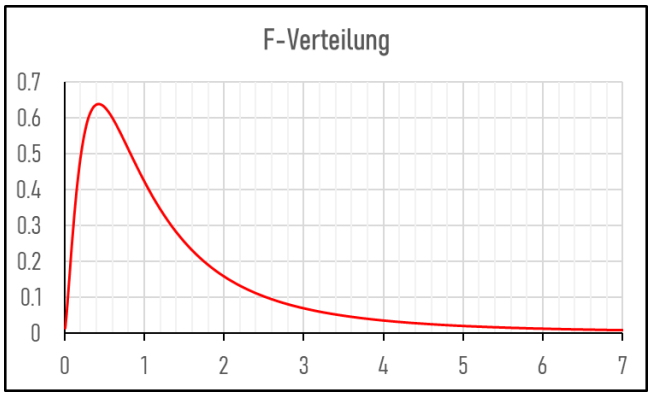
3.3 Chi-Quadrat-Verteilung



Die Chi-Quadrat-Verteilung bzw. χ^2-Verteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der nicht-negativen reellen Zahlen. Üblicherweise ist mit „Chi-Quadrat-Verteilung“ die zentrale Chi-Quadrat-Verteilung gemeint. Die Chi-Quadrat-Verteilung hat einen einzigen Parameter, nämlich die Anzahl der Freiheitsgrade n.
Sie ist eine der Verteilungen, die aus der Normalverteilung N (μ, σ^2) abgeleitet werden können: Sind $Z_1, \ldots, Z_n$ unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen, so ist die Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden definiert als die Verteilung der Summe $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ der quadrierten Zufallsvariablen. Solche Summen quadrierter Zufallsvariablen treten bei Schätzfunktionen wie der Stichprobenvarianz zur Schätzung der empirischen Varianz auf. Die Chi-Quadrat-Verteilung ermöglicht damit unter anderem ein Urteil über die Kompatibilität eines vermuteten funktionalen Zusammenhangs (Abhängigkeit von der Zeit, Temperatur, Druck etc.) mit empirisch ermittelten Messpunkten: Unter einer Auswahl von verschiedenen Modellen bietet dasjenige mit der besten Anpassungsgüte, dem kleinsten Chi-Quadrat-Wert, die beste Erklärung der Daten. So stellt die Chi-Quadrat-Verteilung durch die Quantifizierung der zufälligen Schwankungen die Auswahl verschiedener Erklärungsmodelle auf eine numerische Basis. Außerdem erlaubt sie, wenn man die empirische Varianz bestimmt hat, die Schätzung des Vertrauensintervalls, das den (unbekannten) Wert der Varianz der Grundgesamtheit mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit einschließt.

zentrale Chiquadrat-Verteilung
pdf_chi_sq(x , df)
cdf_chi_sq(x , df)
comp_cdf_chi_sq(x , df)
inv_chi_sq(prob , df)
comp_inv_chi_sq(prob , df)
VT_rand_Chi_sq(df)
nicht-zentrale Chiquadrat-Verteilung
pdf_Chi2_nc(x , df , nC)
cdf_Chi2_nc(x , df , nC)
comp_cdf_Chi2_nc(x , df , nC)
inv_Chi2_nc(prob , df , nC)
comp_inv_Chi2_nc(prob , df , nC)
ncp_Chi2_nc(prob , x , df)
comp_ncp_Chi2_nc(prob , x , df)
Chiquadrat-Verteilung für Qrderstatistik
pdf_chi2_os(x , df , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
cdf_chi2_os(x , df , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
comp_cdf_chi2_os(x , df , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
inv_chi2_os(p , df , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
comp_inv_chi2_os(p , df , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)

3.4 F-Verteilung

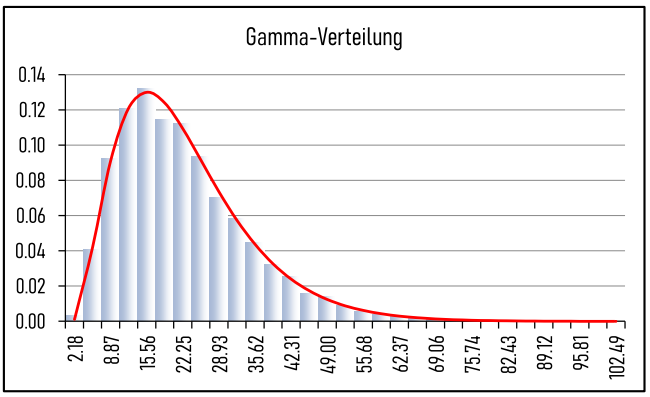


Die F-Verteilung (Fisher-Snedecor-Verteilung) ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die als Quotient zweier unabhängiger, durch ihre Freiheitsgrade (df_1, df_2) geteilter χ^2 -verteilter Zufallsvariablen definiert ist. Sie ist rechtsschief und wird primär im F-Test verwendet, um Varianzen zu vergleichen oder Signifikanzen in der Varianzanalyse (ANOVA) zu prüfen. Die Form hängt von zwei Parametern ab, den Freiheitsgraden des Zählers (df_1) und des Nenners (df_2). Die F-Verteilung ist nur für Werte ≥ 0 definiert. Sie ist die Basis der allermeisten Prüf- und Testverfahren.

zentrale F-Verteilung
pdf_fdist(x , df1 , df2)
cdf_fdist(x , df1 , df2)
comp_cdf_fdist(x , df1 , df2)
inv_fdist(prob , df1 , df2)
comp_inv_fdist(prob , df1 , df2)
VT_rand_F(df1 , df2)
nicht-zentrale F-Verteilung
pdf_fdist_nc(x , df1 , df2 , nC)
cdf_fdist_nc(x , df1 , df2 , nC)
comp_cdf_fdist_nc(x , df1 , df2 , nC)
inv_fdist_nc(prob , df1 , df2 , nC)
comp_inv_fdist_nc(prob , df1 , df2 , nC)
ncp_fdist_nc(prob , x , df1 , df2)
comp_ncp_fdist_nc(prob , x , df1 , df2)
F-Verteilung für Qrderstatistik
pdf_F_os(x , df1 , df2 , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
cdf_F_os(x , df1 , df2 , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
comp_cdf_F_os(x , df1 , df2 , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
inv_F_os(p , df1 , df2 , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
comp_inv_F_os(p , df1 , df2 , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)

4 Gamma- und Beta-Verteilungen

4.1 Gamma-Verteilung



Die Gamma-Verteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die vor allem zur Modellierung von Wartezeiten und Lebensdauern genutzt wird. Sie verallgemeinert die Exponentialverteilung (Wartezeit bis zum ersten Ereignis) auf die Wartezeit bis zum Eintreten des k-ten Ereignisses in einem Poisson-Prozess. Eine Zufallsvariable X ist gammaverteilt mit den Parametern $k > 0$ (Form/Shape) und $\theta > 0$ (Skala/Scale), wenn ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für $x > 0$ gegeben ist.

Gamma-Verteilung
pdf_gamma(x , shape_param , scale_param)
cdf_gamma(x , shape_param , scale_param)
comp_cdf_gamma(x , shape_param , scale_param)
inv_gamma(prob , shape_param , scale_param)
comp_inv_gamma(prob , shape_param , scale_param)
nicht-zentrale Gamma-Verteilung
pdf_gamma_nc(x , shape_param , nc_param)
cdf_gamma_nc(x , shape_param , nc_param)
comp_cdf_gamma_nc(x , shape_param , nc_param)
inv_gamma_nc(prob , shape_param , nc_param)
comp_inv_gamma_nc(prob , shape_param , nc_param)
ncp_gamma_nc(prob , x , shape_param)
comp_ncp_gamma_nc(prob , x , shape_param)
Gamma-Verteilung für Orderstatistik
pdf_gamma_os(x , shape_param , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional scale_param = 1, Optional nc_param = 0)
cdf_gamma_os(x , shape_param , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional scale_param = 1, Optional nc_param = 0)
comp_cdf_gamma_os(x , shape_param , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional scale_param = 1, Optional nc_param = 0)
inv_gamma_os(p , shape_param , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional scale_param = 1, Optional nc_param = 0)
comp_inv_gamma_os(p , shape_param , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional scale_param = 1, Optional nc_param = 0)

4.1.1 Momente der Gamma-Verteilung

Momente der Gamma-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 1)	VT_MoM_Gamma(shape, scale, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 1)	VT_MoM_Gamma(shape, scale, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 1)	VT_MoM_Gamma(shape, scale, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 1)	VT_MoM_Gamma(shape, scale, 4)

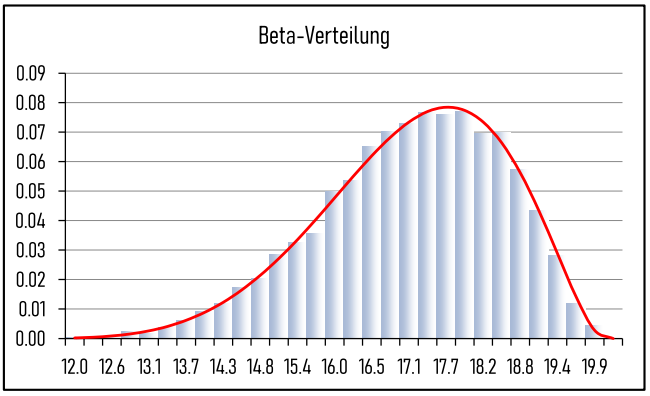
4.1.2 Schätzung der Parameter

2-Parameter Gamma-Verteilung
VT_ML_Gamma_scale(shape , xq)
VT_ML_Gamma_shape(z , Optional tol = 0.0000000001, Optional maxIter = 100)
3-Parameter Gamma-Verteilung
Startwerte
VT_Param_Gamma3_shape(z())
VT_Param_Gamma3_scale(z())
VT_Param_Gamma3_xmin(z())
ML-Summen für Optimierung
VT_MLE_A_Gamma3(z() , shape , scale , xmin)
VT_MLE_B_Gamma3(z() , shape , scale , xmin)
VT_MLE_C_Gamma3(z() , shape , scale , xmin)

4.1.3 Anpassungstest und AD-Optimierung

Anpassungstest für Gamma-Verteilungen
VT_AD_Test_General(z( ), "cdf_gamma", "both", shape_param, scale_param)
VT_AD_Test_General(z( ), "VT_cdf_gamma3", "both", shape_param, scale_param, xmin)

4.2 Beta-Verteilung



Die Beta-Verteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die Werte in einem begrenzten Intervall (standardmäßig zwischen 0 und 1) annimmt. Sie wird oft als „Verteilung von Wahrscheinlichkeiten“ bezeichnet, da sie ideal geeignet ist, um die Unsicherheit über einen unbekannten Anteil oder eine Erfolgswahrscheinlichkeit zu modellieren. Die Form der Verteilung wird durch zwei positive Formparameter, meist α (alpha) und β (beta) genannt, bestimmt. Die Beta-Verteilung ist extrem flexibel und kann viele Formen annehmen und ist durch xmin (untere Grenze) und xmax (obere Grenze) erweiterbar.

Beta-Verteilung
pdf_beta(x , shape_param1 , shape_param2)
cdf_beta(x , shape_param1 , shape_param2)
comp_cdf_beta(x , shape_param1 , shape_param2)
inv_beta(prob , shape_param1 , shape_param2)
comp_inv_beta(prob , shape_param1 , shape_param2)
nicht-zentrale Beta-Verteilung
pdf_beta_nc(x , shape_param1 , shape_param2 , nc_param)
cdf_beta_nc(x , shape_param1 , shape_param2 , nc_param)
comp_cdf_beta_nc(x , shape_param1 , shape_param2 , nc_param)
inv_beta_nc(prob , shape_param1 , shape_param2 , nc_param)
comp_inv_beta_nc(prob , shape_param1 , shape_param2 , nc_param)
ncp_beta_nc(prob , x , shape_param1 , shape_param2)
comp_ncp_beta_nc(prob , x , shape_param1 , shape_param2)
Beta-Verteilung für Orderstatistik
pdf_beta_os(x , shape_param1 , shape_param2 , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
cdf_beta_os(x , shape_param1 , shape_param2 , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
comp_cdf_beta_os(x , shape_param1 , shape_param2 , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
inv_beta_os(p , shape_param1 , shape_param2 , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)
comp_inv_beta_os(p , shape_param1 , shape_param2 , Optional n = 1, Optional r = -1, Optional nc_param = 0)

4.2.1 Momente der Beta-Verteilung

Momente der Beta-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_Beta(alpha, beta, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_Beta(alpha, beta, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_Beta(alpha, beta, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_Beta(alpha, beta, 4)
Momente der 4 Parameter Beta-Verteilung		
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_Beta4(alpha, beta, xmin, xmax, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_Beta4(alpha, beta, xmin, xmax, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_Beta4(alpha, beta, xmin, xmax, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_Beta4(alpha, beta, xmin, xmax, 4)

4.2.2 Schätzung der Parameter

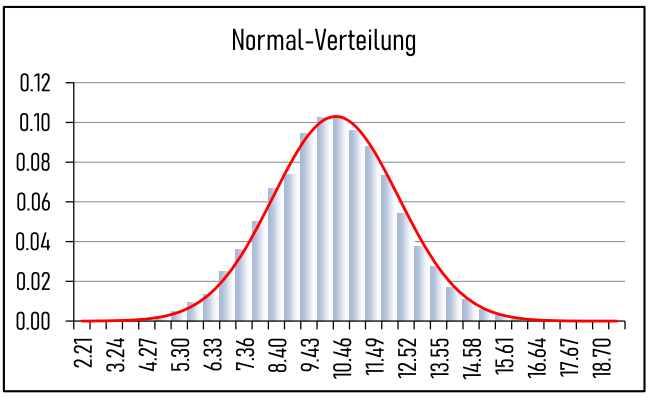
2-Parameter Gamma-Verteilung
Startwerte (2 Parameter)
VT_Param_Beta_alpha(Mean, Var)
VT_Param_Beta_beta(Mean , Var)
ML-Summen für Optimierung (2 Parameter)
VT_MLE_A_Beta(z(), alpha, beta)
VT_MLE_B_Beta(z(), alpha, beta)
Varianzen der Parameter (2 Parameter)
VT_MLE_A_Var_Beta(alpha, beta, n)
VT_MLE_B_Var_Beta(alpha, beta, n)
4-Parameter Gamma-Verteilung
Startwerte (4 Parameter)
VT_Param_Beta_a_or_b(Schiefe , Kurtosis , "alpha")
VT_Param_Beta_a_or_b(Schiefe , Kurtosis , "beta")
VT_Param_Beta_LL(mean , varianz , alpha , beta)
VT_Param_Beta_UL(mean , varianz , alpha , beta)
ML-Summen für Optimierung (4 Parameter)
VT_MLE_Beta4_A(z(), alpha, beta, xmin, xmax)
VT_MLE_Beta4_B(z(), alpha, beta, xmin, xmax)
VT_MLE_Beta4_Xmax(z(), alpha, beta, xmin, xmax)
VT_MLE_Beta4_Xmin(z(), alpha, beta, xmin, xmax)

4.2.3 Anpassungstest und AD-Optimierung

Anpassungstest für Beta-Verteilungen
VT_AD_Test_General(z(), "cdf_beta", "both", alpha, beta)
VT_AD_Test_General(z(), "VT_cdf_beta4", "both", alpha, beta, xmin, xmax)

5 Familie der Normal-Verteilungen

5.1 Normalverteilung



Die Normalverteilung, auch Gauß-Verteilung genannt, ist eines der wichtigsten Konzepte der Statistik. Sie beschreibt, wie sich Daten symmetrisch um einen Mittelwert verteilen, was grafisch die charakteristische Gaußsche Glockenkurve ergibt. Die Kurve ist perfekt symmetrisch um das Zentrum. Mittelwert, Median und Modus liegen bei einer perfekten Normalverteilung am selben Punkt. Sie wird durch zwei Werte definiert: Der Erwartungswert μ (Mittelpunkt der Glocke) und die Standardabweichung σ, die angibt, wie breit oder schmal die Kurve gestreckt ist. Der Definitionsbereich und Parameterbedingungen sind: $-\infty < x < \infty$, $xq \in \mathbb{R}$, $s > 0$.
Die Normalverteilung ist eine der zentralen kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Statistik und beschreibt zufällige Schwankungen vieler natürlicher, technischer und wirtschaftlicher Prozesse. Aufgrund ihrer mathematischen Eigenschaften und der Bedeutung des zentralen Grenzwertsatzes bildet sie die Grundlage zahlreicher analytischer Verfahren, darunter Konfidenzintervallberechnungen, Hypothesentests, Regressionsmethoden und Prozessfähigkeitsbewertungen. In der Natur und Gesellschaft folgen viele Merkmale diesem Muster, weil sie durch das Zusammenwirken vieler kleiner, unabhängiger Faktoren entstehen (Zentraler Grenzwertsatz). Beispiele sind: Körpergröße oder Gewicht von Menschen, Intelligenzquotient (IQ), Messfehler bei physikalischen Experimenten und Vieles mehr.

Standardfunktionen NV (xq, s)
VT_pdf_normal(x, xq, s)
VT_cdf_normal(x, xq, s)
VT_inv_normal(p, xq, s)
RandNorm(xq, s)

5.1.1 Momente der Normalverteilung

Momente der Normal-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_Momente(z(), 1, 0)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_Momente(z(), 2, 0)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	0
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	3

5.1.2 Schätzung der Parameter

Parameter	Funktion
Median	VT_Median(z( ))
unterer Kl	VT_Xmed_VB(z( ), Sig, n, "un")
oberer Kl	VT_Xmed_VB(z( ), Sig, n, "ob")
Mittelwert	VT_Xquer(z( ))
unterer Kl	VT_Xquer_VB(Sig, xq, s, n, "un")
oberer Kl	VT_Xquer_VB(Sig, xq, s, n, "ob")
Varianz	VT_Variance(z( ))
unterer Kl	VT_Var_VB(Sig, n, var, "ob")
oberer Kl	VT_Var_VB(Sig, n, var, "un")
Standardabweichung	VT_Variance(z( ))^0.5
unterer Kl	VT_Var_VB(Sig, n, var, "un")^0.5
oberer Kl	VT_Var_VB(Sig, n, var, "ob")^0.5
Versuchsfehler	VT_Std_Error(s, n)
St.Abw, Schiefe	VT_Skewness_Error(n)
Schiefe	VT_Skewness(z( ))
unterer Kl	VT_Skewness_VB(g1, sg1, "un")
oberer Kl	VT_Skewness_VB(g1, sg1, "ob")
St.Abw, Excess	VT_Excess_Error(n)
Excess	VT_Excess(z( ))
unterer Kl	VT_Excess_VB(g2, sg2, "un")
oberer Kl	VT_Excess_VB(g2, sg2, "ob")

Parameter	Funktion
Deskriptive Kenngrößen	
Xmin	VT_Xmin(z( ))
1. Quartil	VT_Quantiles(z( ), 0.25)
2. Quartil	VT_Quantiles(z( ), 0.5)
3. Quartil	VT_Quantiles(z( ), 0.75)
Xmax	VT_Xmax(z( ))
Spannweite	Xmax - Xmin
Variationkoeffizient	Standardabweichung / Mittelwert
Mittelwert	VT_Xquer(z( ))
Standardabweichung	VT_Variance(z( ))^0.5
Geom. Mittelwert	VT_GeoMean(z( ), Optional Byval xmin as Double = 0#)
Harm, Mittelwert	VT_Mom_HarmMean(z( ), Optional Byval xmin as Double = 0#)

5.1.3 Anpassungstest auf Normalverteilung

Anpassungstest für Normalverteilungen
VT_AD_Test_General(z( ), "VT_cdf_normal", "both", xq, s)

5.2 Logarithmische Normalverteilung

Die logarithmische Normalverteilung (auch Lognormalverteilung) ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen, deren Logarithmus normalverteilt ist. Während die klassische Normalverteilung durch die Summe vieler kleiner Einflüsse entsteht, tritt die Lognormalverteilung dort auf, wo Einflüsse multiplikativ wirken. Die Verteilung ist nur für positive Werte (x > 0) definiert. Sie ist stets rechtsschief (linkssteil), was bedeutet, dass sie einen langen Ausläufer nach rechts hat.Sie wird durch die Parameter μ (Mittelwert) und σ (Standardabweichung) des zugrunde liegenden Logarithmus beschrieben. Wenn eine Variable X lognormalverteilt ist, dann gilt für die Variable Y = ln(X), dass diese einer Normalverteilung folgt. Umgekehrt ist exp(Y) lognormalverteilt, wenn Y normalverteilt ist. Nach Transformation gelten die Berechnungsformeln der Normalverteilung.

5.3 Harmonische Normalverteilung

Die harmonische Normalverteilung (auch Reziprokverteilung) ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen, deren Kehrwert normalverteilt ist. Während die klassische Normalverteilung durch die Summe vieler kleiner Einflüsse entsteht, tritt die Reziprokverteilung dort auf, wo Einflüsse durch ein Verhältnis wirken. Die Verteilung ist nur für positive Werte (x > 0) definiert. Sie ist stets rechtsschief (linkssteil), was bedeutet, dass sie einen langen Ausläufer nach rechts hat. Sie wird durch die Parameter μ (Mittelwert) und σ (Standardabweichung) des zugrunde liegenden Kehrwertes beschrieben. Wenn eine Variable X reziprokverteilt ist, dann gilt für die Variable Y = 1/X, dass diese einer Normalverteilung folgt. Umgekehrt ist 1/Y reziprokverteilt, wenn Y normalverteilt ist. Eine Besonderheit ist, dass große Werte klein werden und kleine Werte groß werden. Nach Transformation gelten die Berechnungsformeln der Normalverteilung.

5.4 Powertransformation nach Box-Cox

Die Box-Cox-Transformation ist ein mathematisches Instrument der Regressionsanalyse und Zeitreihenanalyse, mit dem eine Stabilisierung der Varianz erreicht werden soll (Verringerung von Heteroskedastizität). Die Formel lautet:

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \dfrac{\left(Y_t + c\right)^{\lambda} - 1}{\lambda} & \text{für } \lambda \neq 0 \\ \ln\left(Y_t + c\right) & \text{für } \lambda = 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} \left(\lambda y + 1\right)^{1/\lambda} - c & \text{für } \lambda \neq 0 \\ e^{y} - c & \text{für } \lambda = 0 \end{cases}$$

Die auf Y_t addierte Konstante *c* wird lediglich benötigt, um bei Bedarf dafür zu sorgen, dass die Werte, von welchen Wert transformiert werden soll, tatsächlich positiv sind, da Power-Transformationen nur für positive Werte definiert sind. Nach Transformation gelten die Berechnungsformeln der Normalverteilung.

5.4.1 Hin- und Rücktransformation

Box-Cox Transformationen
VT_BoxCox(x, lambda, c)
VT_BoxCox_inv(y, lambda, c)

5.5 Johnson-Transformationen vom Typ SB

Die Johnson-Verteilung vom Typ SB gehört zur Johnson-Systemfamilie transformierter Verteilungen und dient zur Modellierung beschränkter Zufallsgrößen innerhalb eines endlichen Werteintervalls. Durch eine nichtlineare Transformation einer normalverteilten Größe lassen sich stark asymmetrische oder unterschiedlich konzentrierte Verteilungen darstellen, wodurch eine flexible Anpassung an reale Datensituationen ermöglicht wird. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $a < x < b, \delta > 0, \lambda > 0, \gamma, \xi \in \mathbb{R}$
OQM-Stat stellt Funktionen zur direkten Nutzung der Johnson-SB-Verteilung bereit, einschließlich Routinen zur Berechnung von Dichte, Verteilungsfunktion, Quantilen sowie zur Simulation entsprechender Zufallswerte. Diese erlauben probabilistische Bewertungen, Anpassungsanalysen und Modellstudien ohne Programmieraufwand durch den Anwender. Nach Transformation gelten die Berechnungsformeln der Normalverteilung.

5.5.1 Standardfunktionen Johnson SB

Standardfunktionen Johnson Typ SB
VT_pdf_Johnson_SB(x, gamma, delta, xi, lambda)
VT_cdf_Johnson_SB(x, gamma, delta, xi, lambda)
VT_inv_Johnson_SB(p, gamma, delta, xi, lambda)
VT_rand_Johnson_SB(gamma, delta, xi, lambda)

5.5.2 Hin- und Rücktransformation Johnson SB

Johnson SB Transformationen
VT_JohnsonSB(x, gamma, delta, xi, lambda)
VT_JohnsonSB_inv(y, gamma, delta, xi, lambda)

Mit Johnson-Transformation können Sie die Daten unter Verwendung des Johnson-Verteilungssystems transformieren, so dass sie einer exakt einer standardisierten Normalverteilung folgen, vorausgesetzt, dass die Daten überhaupt durch eine Transformation normalisiert werden können. Diese Analyse bietet Ihnen folgende Möglichkeiten:

$$\xi < x < \xi + \lambda$$

$$z = \gamma + \delta ln\left(\frac{x-\xi}{\xi+\lambda-x}\right)$$

$$x = \xi + \lambda \frac{e^{(z-\gamma)/\delta}}{1+e^{(z-\gamma)/\delta}}$$

5.6 Johnson-Transformationen vom Typ SU

Die Johnson-Verteilung vom Typ SU gehört zur Familie transformierter Johnson-Verteilungen und dient zur Modellierung unbeschränkter, kontinuierlicher Zufallsgrößen mit möglicher Schiefe und variabler Gipfeligkeit. Durch eine nichtlineare Transformation einer normalverteilten Größe lassen sich sowohl symmetrische als auch stark asymmetrische Verteilungen darstellen, wodurch eine flexible Anpassung an reale Datensituationen ermöglicht wird, die von klassischen Standardmodellen abweichen. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $-\infty < x < \infty$, $\delta > 0$, $\lambda > 0$, $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$

OQM-Stat stellt Funktionen zur direkten Nutzung der Johnson-SU-Verteilung bereit, einschließlich Routinen zur Berechnung von Dichte, Verteilungsfunktion, Quantilen sowie zur Simulation entsprechender Zufallswerte. Nach Transformation gelten die Berechnungsformeln der Normalverteilung.

5.6.1 Standardfunktionen Johnson SU

Standardfunktionen Johnson Typ SU
VT_pdf_Johnson_SU(x, gamma, delta, xi, lambda)
VT_cdf_Johnson_SU(x, gamma, delta, xi, lambda)
VT_inv_Johnson_SU(p, gamma, delta, xi, lambda)
VT_rand_Johnson_SU(gamma, delta, xi, lambda)

5.6.2 Hin- und Rücktransformation Johnson SU

Johnson SU Transformationen
VT_JohnsonSU(x, gamma, delta, xi, lambda)
VT_JohnsonSU_inv(y, gamma, delta, xi, lambda)

Die Funktionen ermöglichen parameterabhängige Modellierungen unbeschränkter Prozessgrößen und sind insbesondere bei Verteilungsanpassungen, Transformationen und Simulationen von Bedeutung, wenn sowohl Schiefe als auch Abweichungen von der Normalform berücksichtigt werden sollen. Dadurch erweitert dieser Funktionsblock die Möglichkeiten zur realitätsnahen Datenbeschreibung über klassische kontinuierliche Verteilungen hinaus.

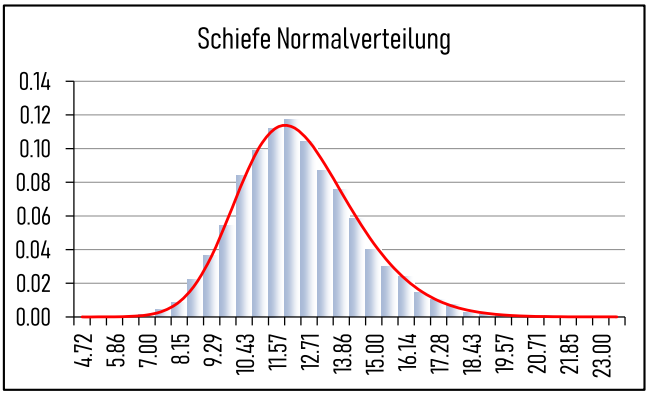
$$-\infty < x < \infty$$

$$z = \gamma + \delta sinh^{-1}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) = \gamma + \delta ln\left(\frac{x-\xi}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)^2 + 1}\right)$$

$$x = \xi + \lambda sinh\left(\frac{z-\gamma}{\delta}\right) \text{ mit } sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Diese Transformationen sind sehr mächtig, sodass nahezu alle eingipfligen stetigen Verteilungen in eine standardisierte Normalverteilung überführt werden. Die Anfangsschätzung der Johnson-Transformation basiert auf vier symmetrisch um Null angeordneten Referenzpunkten der Standardnormalverteilung (−3h, −h, h, 3h). Der Abstandsfaktor h wird in einem vorgegebenen Bereich variiert, um eine robuste Startlösung zu finden. Anschließend werden die so erhaltenen Parameter mittels Anderson-Darling-Kriterium weiter optimiert und abschließend so nachjustiert, dass die transformierten Werte exakt einer Standardnormalverteilung N(0,1) entsprechen.

5.7 Schiefe Normalverteilung



Die schiefe Normalverteilung erweitert die klassische Normalverteilung um einen zusätzlichen Formparameter zur Beschreibung asymmetrischer Verteilungen. Dadurch lassen sich reale Datensituationen modellieren, bei denen systematische Schiefe auftritt, etwa in Prozessmessungen, finanziellen Zeitreihen oder Zuverlässigkeitsdaten. Sie verbindet die vertrauten Eigenschaften der Normalverteilung mit erhöhter Flexibilität bei der Formanpassung. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $-\infty < x < \infty, \xi \in \mathbb{R}, \omega > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

5.7.1 Standardfunktionen für SND

Standardfunktionen SND (xq, s, alpha)
pdf_SND(x, xi, omega, alpha)
cdf_SND(x, xi, omega, alpha)
inv_SND(p, xi, omega, alpha)
Rand_SND(xi, omega, alpha)

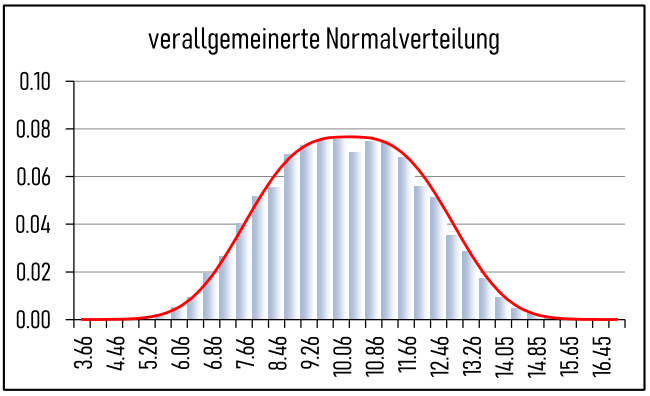
5.7.2 Momente der SND

Momente der schiefen Normal-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_SND(xi, omega, alpha , 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_SND(xi, omega, alpha , 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_SND(xi, omega, alpha , 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_SND(xi, omega, alpha , 4)

5.7.3 Schätzung der Parameter

Vorbereitung
SND_Delta(g1)
Startwerte
SND_alpha(delta)
SND_omega(delta, s)
SND_xi(delta, omega, xq)
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z( ), "cdf_SND", "b", xi, omega, alpha)

5.8 Verallgemeinerte Normalverteilung



Die verallgemeinerte Normalverteilung erweitert die klassische Normalverteilung um einen zusätzlichen Formparameter zur Steuerung der Gipfeligkeit und Schwanzverteilung. Dadurch lassen sich sowohl spitzgipflige als auch flachere Verteilungen modellieren, was eine flexible Anpassung an reale Datensituationen ermöglicht, bei denen die Standardnormalannahme nicht ausreichend ist.bDer Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $-\infty < x < \infty, \mu \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > 0$
OQM-Stat stellt Funktionen zur direkten Nutzung der verallgemeinerten Normalverteilung bereit, darunter Routinen zur Berechnung von Dichte, Verteilungsfunktion, Quantilen sowie zur Simulation entsprechender Zufallswerte.

5.8.1 Standardfunktionen für GND

Standardfunktionen GND (xq, s, alpha)
pdf_GND(x, mu, alpha, beta)
cdf_GND(x, mu, alpha, beta)
inv_GND(p, mu, alpha, beta)
Rand_GND(mu, alpha, beta)

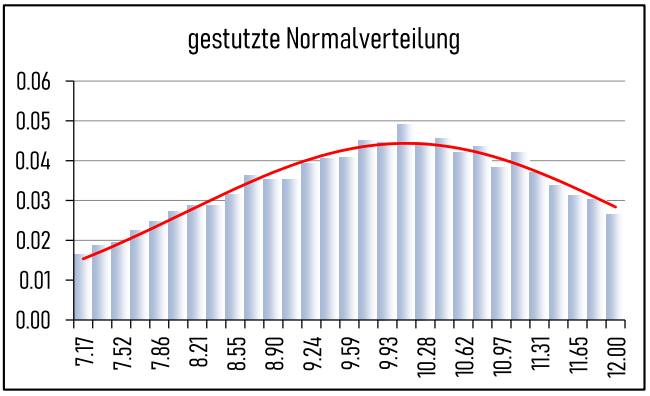
5.8.2 Momente der GND

Momente der verallgemeinerten Normal-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_GND(mu, alpha, beta, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_GND(mu, alpha, beta, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_GND(mu, alpha, beta, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_GND(mu, alpha, beta, 4)

5.8.3 Schätzung der Parameter

Startwerte
GND_mu(z( ))
GND_beta(z( ), mu)
GND_alpha(z( ), mu, beta)
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z( ), "cdf_GND", "b", mu, alpha, beta)

5.9 Gestutzte Normalverteilung



Die gestutzte Normalverteilung beschreibt eine Normalverteilung, deren Wertebereich auf ein endliches Intervall eingeschränkt ist. Sie entsteht, wenn Beobachtungen außerhalb festgelegter Grenzen nicht berücksichtigt werden oder physikalisch bzw. technisch nicht auftreten können. Solche Situationen treten beispielsweise bei Messbereichsbeschränkungen, oder selektiven Stichproben auf. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $a < x < b, xq \in \mathbb{R}, s > 0, a < b$
OQM-Stat stellt Funktionen zur direkten Nutzung der gestutzten Normalverteilung bereit, einschließlich Routinen zur Berechnung von Dichte, Verteilungsfunktion, Quantilen sowie zur Simulation entsprechender Zufallswerte innerhalb vorgegebener Grenzen.

5.9.1 Standardfunktionen der gestutzten Normalverteilung

Standardfunktionen gestutzte NV
VT_pdf_Normaltr(x, xmin, xmax, xq, s)
VT_cdf_Normaltr(x, xmin, xmax, xq, s)
VT_inv_Normaltr(p, xmin, xmax, xq, s)
VT_rand_Normaltr(xmin, xmax, xq, s)

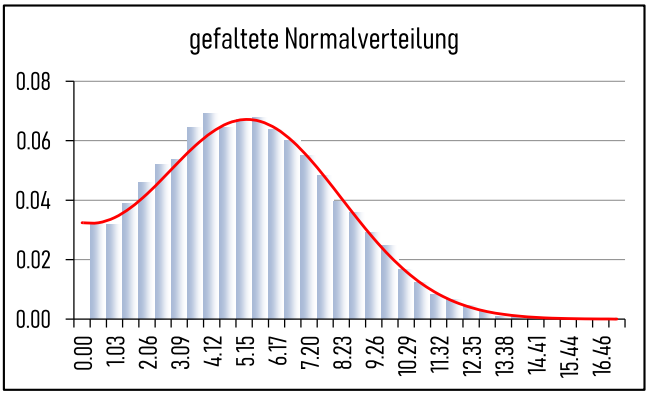
5.9.2 Momente der gestutzten Normalverteilung

Momente der verallgemeinerten Normal-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_NormTrunc(xq, s, xmin, xmax, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_NormTrunc(xq, s, xmin, xmax, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_NormTrunc(xq, s, xmin, xmax, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_NormTrunc(xq, s, xmin, xmax, 4)

5.9.3 Schätzung der Parameter

Startwerte
VT_Xmin(z())
VT_Xmax(z())
VT_Xquer(z())
VT_Variance(z())^0.5
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(z(),"VT_cdf_Normaltr", "b", xmin, xmax, xq, s)

5.10 Gefaltete Normalverteilung (Betragsverteilung 1. Art)



Die gefaltete Normalverteilung, auch Betragsverteilung I. Art genannt, entsteht durch Bildung des Absolutwertes einer normalverteilten Zufallsgröße. Dadurch werden negative Werte auf den positiven Bereich gespiegelt, sodass ausschließlich nichtnegative Realisierungen auftreten. Diese Verteilung eignet sich insbesondere zur Modellierung von Abweichungsbeträgen, Messfehlergrößen oder absoluten Schwankungsmaßen, bei denen nur die Größe der Abweichung und nicht deren Richtung relevant ist. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $0 \le x < \infty$, $xq \in \mathbb{R}$, $s > 0$
OQM-Stat stellt Funktionen zur direkten Nutzung der gefalteten Normalverteilung bereit, einschließlich Routinen zur Berechnung von Dichte, Verteilungsfunktion, Quantilen sowie zur Simulation entsprechender Zufallswerte.

5.10.1 Standardfunktionen der gefalteten Normalverteilung

Standardfunktionen gefalteten NV
VT_pdf_betrag1(x , xq , s)
VT_cdf_betrag1(x , xq , s)
VT_rand_normalfolded(xq , s)

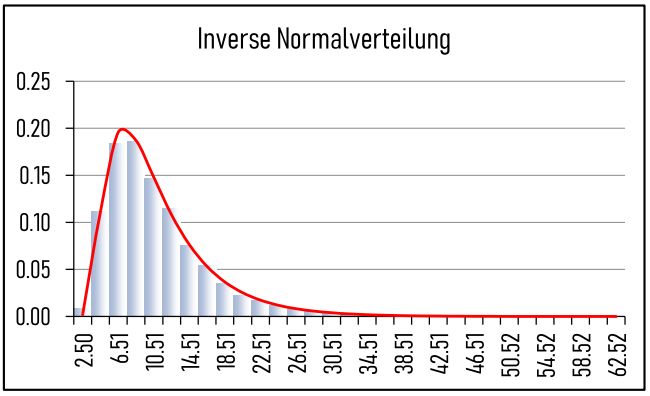
5.10.2 Momente der gefalteten Normalverteilung

Momente der folded Normal-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_Momente(z( ), 1, 0)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_Momente(z( ), 2, 0)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	0
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	3

5.10.3 Schätzung der Parameter

Startwerte
VT_Xquer(z( ))
VT_Variance(z( ))^0.5
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_normalBV1(z( ), xq, s)

5.11 Inverse Normalverteilung



Die inverse Normalverteilung, auch Wald- oder Gauss-Verteilung genannt, ist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung für positive Zufallsgrößen und wird insbesondere zur Modellierung von Zeit- oder Wegdauern bis zum erstmaligen Erreichen eines Schwellenwertes eingesetzt. Sie tritt unter anderem in stochastischen Driftprozessen, Zuverlässigkeitsanalysen sowie finanz- und naturwissenschaftlichen Anwendungen auf und zeichnet sich durch eine charakteristische rechtsschiefe Form aus. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $0 < x < \infty, \mu > 0, \lambda > 0$
OQM-Stat stellt Funktionen zur direkten Nutzung dieser Verteilung bereit, einschließlich Routinen zur Berechnung von Dichte, Verteilungsfunktion, Quantilen sowie zur Simulation entsprechender Zufallswerte.

5.11.1 Standardfunktionen der inversen Normalverteilung

Standardfunktionen inverse NV
VT_pdf_norminv(x, xq, lambda, xmin)
VT_cdf_norminv(x, xq, lambda, xmin)
VT_inv_norminv(p, xq, lambda, xmin)
VT_rand_norminv(xq, lambda, xmin)

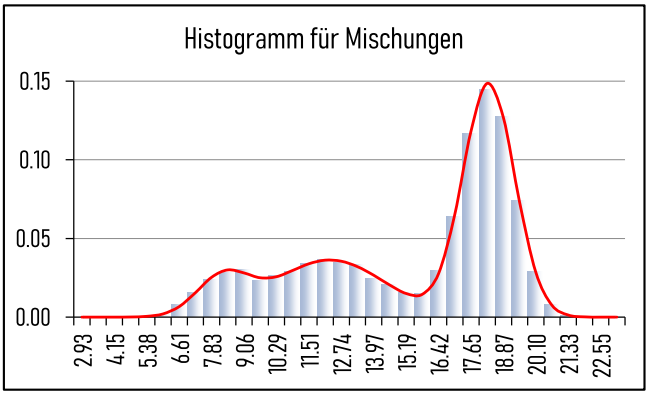
5.11.2 Momente der inversen Normalverteilung

Momente der inverse Normal-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_InvGauss(xq, lambda, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_InvGauss(xq, lambda, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_InvGauss(xq, lambda, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_InvGauss(xq, lambda, 4)

5.11.3 Schätzung der Parameter

Startwerte
VT_Xquer(z( ))*0.8
ML_Param_InvNV_xq(z(), xmin)
ML_Param_InvNV_k(z(), xmin, xq)
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(Z( ),"VT_cdf_norminv", "b", xmin, xq, lambda)

5.12 Mischung von Normalverteilungen



Die Mischverteilung von Normalverteilungen beschreibt Zufallsgrößen, die aus mehreren normalverteilten Teilpopulationen mit unterschiedlichen Parametern stammen. Jeder Teilanteil trägt mit einem Gewicht zur Gesamtverteilung bei, wodurch mehrgipflige, asymmetrische oder verbreiterte Verteilungsformen entstehen können. Solche Modelle treten häufig auf, wenn Daten aus heterogenen Prozessen, verschiedenen Betriebszuständen oder überlagerten Einflussquellen stammen. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $-\infty < x < \infty$, $xq_{(i)} \in \mathbb{R}$, $s_{(i)} > 0$, $p_{(i)} \geq 0$, $\sum p_{(i)} = 1$
OQM-Stat stellt Funktionen zur direkten Nutzung von Normalmischverteilungen bereit, einschließlich Routinen zur Berechnung von Dichte, Verteilungsfunktion, Quantilen sowie zur Simulation entsprechender Zufallswerte auf Basis gewichteter Komponenten.

5.12.1 Standardfunktionen der Mischung von Normalverteilungen

Standardfunktionen Mischung von NV
VT_pdf_Normalmix(k, x, xq(i), s(i), p(i))
VT_cdf_Normalmix(k, x, xq(i), s(i), p(i))
VT_inv_Normalmix(p, k, xq(i), s(i), p(i))
VT_rand_Normalmix(x, xq(i), s(i), p(i))

5.12.2 Momente der Mischung von Normalverteilungen

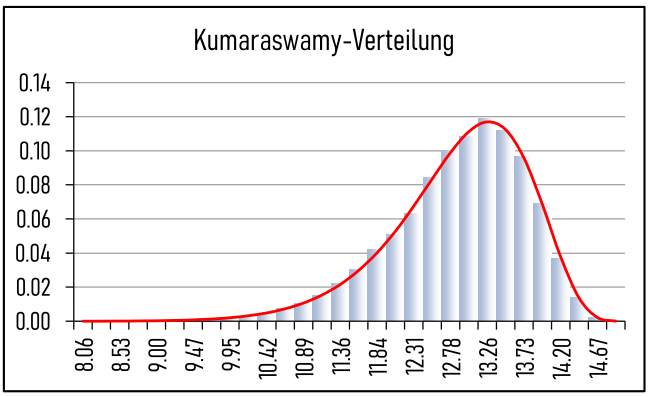
Für jede Verteilung gelten die Momente der Normalverteilung.

5.12.3 Schätzung der Parameter

Die Anteile p(i) und die Parameter μ(i) und σ(i) werden mit Hilfe des EM-Algorithmus ermittelt.

6 Beidseitig begrenzte Verteilungen

6.1 Kumaraswamy-Verteilung



Die Kumaraswamy-Verteilung ist eine stetige, auf das Intervall (0,1) beschränkte Verteilung mit zwei positiven Formparametern. Sie weist eine flexible Form auf und kann je nach Parameterwahl symmetrisch, schief, U-förmig oder glockenförmig erscheinen. Aufgrund ihrer analytisch einfachen Struktur stellt sie eine praktikable Alternative zur Beta-Verteilung dar. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0$ *oder* $xmin < x < xmax$ *bei Erweiterung*
Die Verteilung wird durch die beiden Formparameter α und β definiert. Der Parameter α beeinflusst den Verlauf im unteren Intervallbereich, während β das Verhalten im oberen Bereich steuert. Durch geeignete Parameterkombinationen lassen sich sehr unterschiedliche Verteilungsformen modellieren. Die Kumaraswamy-Verteilung findet Anwendung in der Hydrologie, Zuverlässigkeitsanalyse, Einkommensverteilung sowie bei Modellen mit natürlich beschränktem Wertebereich. Im Vergleich zur Beta-Verteilung ist sie analytisch einfacher handhabbar, da keine spezielle Beta-Funktion erforderlich ist.

6.1.1 Standardfunktionen der Kumaraswamy-Verteilungen

Standardfunktionen Kumaraswamy-Verteilung
VT_pdf_kumaraswamy4(x, alpha, beta, Optional xmin = 0#, Optional xmax = 1#)
VT_cdf_kumaraswamy4(x, alpha, beta, Optional xmin = 0#, Optional xmax = 1#)
VT_inv_kumaraswamy4(p, alpha, beta, Optional xmin = 0#, Optional xmax = 1#)
VT_rand_kumaraswamy4(alpha, beta, Optional xmin = 0#, Optional xmax = 1#)

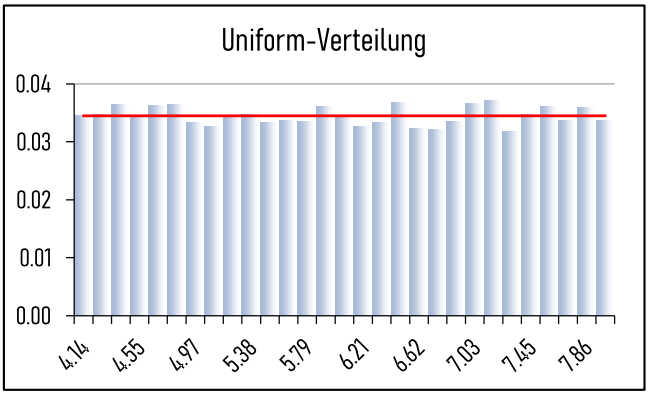
6.1.2 Momente der Kumaraswamy-Verteilungen

Momente der Kumaraswamy-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_Kumaraswamy(alpha, beta, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_Kumaraswamy(alpha, beta, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_Kumaraswamy(alpha, beta, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_Kumaraswamy(alpha, beta, 4)

6.1.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Kumaraswamy
2. Parameter
VT_Kuma_Start_alpha(z( ), beta)
VT_Kuma_Start_beta(z( ))
4. Parameter
VT_Xmin(z( )) * 0.9
VT_Xmax(z( )) * 1.1
VT_Kuma_Start_alpha(z( ), beta)
VT_Kuma_Start_beta(z( ))
AD-Test und Optimierungssumme
2. Parameter
VT_AD_Test_general(z( ), "VT_cdf_kumaraswamy4", "b", alpha, beta)
4. Parameter
VT_AD_Test_general(z( ), "VT_cdf_kumaraswamy4", "b", alpha, beta, xmin, xmax)

6.2 Uniform-Verteilung



Die Uniform-Verteilung (Gleichverteilung) ist eine stetige Verteilung mit konstantem Dichteverlauf innerhalb eines festen Intervalls. Alle Werte zwischen xmin und xmax sind gleich wahrscheinlich. Außerhalb dieses Bereichs ist die Wahrscheinlichkeit null. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $xmin \leq x \leq xmax$, $xmin < xmax$

Die Uniform-Verteilung findet breite Anwendung in der Monte-Carlo-Simulation, als Basismodell bei fehlender Vorinformation sowie als Ausgangsverteilung für Inversionsmethoden zur Erzeugung anderer Zufallsverteilungen.

6.2.1 Standardfunktionen der Uniform-Verteilungen

Standardfunktionen Uniform-Verteilung
VT_pdf_uniform(x, xmin, xmax)
VT_cdf_uniform(x, xmin, xmax)
VT_inv_uniform(p, xmin ,xmax)
VT_rand_uniform(xmin, xmax)

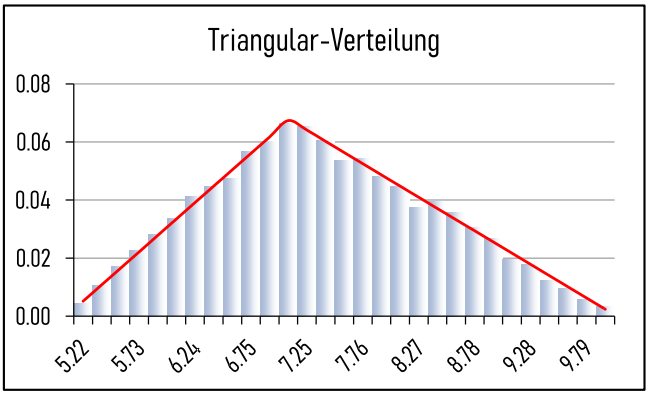
6.2.2 Momente der Uniform-Verteilungen

Momente der Uniform-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_Uniform(xmin, xmax, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_Uniform(xmin, xmax, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_Uniform(xmin, xmax, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_Uniform(xmin, xmax, 4)

6.2.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Uniform
VT_Xmin(z()) * 0.99
VT_Xmax(z()) * 1.01
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z(), "VT_cdf_uniform", "b", xmin, xmax)

6.3 Triangular-Verteilung



Die Triangular-Verteilung ist eine stetige, auf ein endliches Intervall beschränkte Verteilung mit linear ansteigender und anschließend linear abfallender Dichte. Sie wird durch drei Parameter definiert: Untergrenze *xmin*, Obergrenze *xmax* und den Modalwert *mode*, der die Lage des Maximums der Dichte bestimmt. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen: $xmin \le x \le xmax$, $xmin < mode < xmax$

Die Triangular-Verteilung wird häufig verwendet, wenn nur minimale Informationen über eine Zufallsgröße vorliegen, etwa bei Expertenabschätzungen, Projektbewertungen oder Risikomodellen. Sie bietet eine realistischere Alternative zur Uniform-Verteilung, da sie einen wahrscheinlichsten Wert explizit berücksichtigt.

6.3.1 Standardfunktionen der Triangular-Verteilungen

Standardfunktionen Triangular-Verteilung
VT_pdf_Triangular(x, xmin, mode, xmax)
VT_cdf_Triangular(x, xmin, mode, xmax)
VT_inv_Triangular(p, xmin, mode, xmax)
VT_rand_Triangular(xmin, mode, xmax)

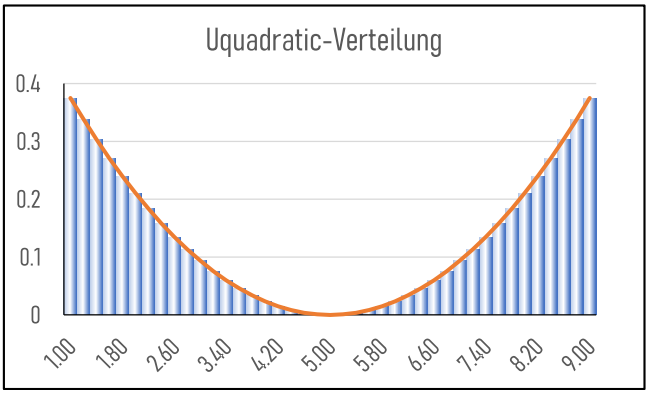
6.3.2 Momente der Triangular-Verteilungen

Momente derTriangular-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_Triangle(xmin, mode, xmax, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_Triangle(xmin, mode, xmax, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_Triangle(xmin, mode, xmax, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_Triangle(xmin, mode, xmax, 4)

6.3.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Triangular
VT_Xmin(z( )) * 0.99
VT_Xmax(z( )) * 1.01
VT_Xquer(z( )) * 3 - xmin - xmax
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z( ), "VT_cdf_Triangular", "b", xmin, mode, xmax)

6.4 Uquadratic-Verteilung



Die U-Quadratic-Verteilung ist eine stetige, auf ein endliches Intervall beschränkte Verteilung mit quadratisch ansteigender Dichte von der Intervallmitte zu den Randbereichen. Sie besitzt eine symmetrische, U-förmige Struktur, bei der Werte nahe den Grenzen wahrscheinlicher sind als Werte im Zentrum des Intervalls. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $xmin \leq x \leq xmax$, $xmin < xmax$

Die U-Quadratic-Verteilung eignet sich zur Modellierung von Prozessen, bei denen Extremwerte innerhalb eines begrenzten Bereichs wahrscheinlicher sind als mittlere Werte. Typische Anwendungen finden sich in Szenarioanalysen, Qualitätsbewertungen oder technischen Toleranzmodellen mit erhöhter Randwahrscheinlichkeit.

6.4.1 Standardfunktionen der Uquadratic-Verteilungen

Standardfunktionen Uquadratic-Verteilung
VT_pdf_Uquadratic(x, xmin, xmax)
VT_cdf_Uquadratic(x, xmin, xmax)
VT_inv_Uquadratic(p, xmin, xmax)
VT_rand_Uquadratic(xmin, xmax)

6.4.2 Momente der Uquadratic-Verteilungen

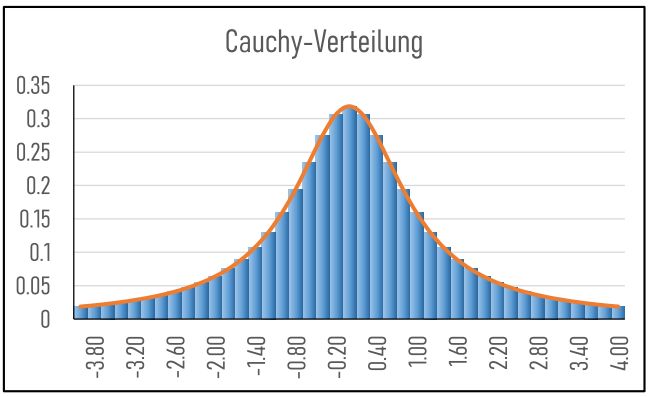
Momente der Uquadratic-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_UQuadratic(xmin, xmax, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_UQuadratic(xmin, xmax, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_UQuadratic(xmin, xmax, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_UQuadratic(xmin, xmax, 4)

6.4.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Uquadratic
VT_Xmin(z( )) * 0.99
VT_Xmax(z( )) * 1.01
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z( ), "VT_cdf_Uquadratic", "b", xmin, xmax)

7 Beidseitig offene Verteilungen

7.1 Cauchy-Verteilung



Die Cauchy-Verteilung beschreibt eine stetige, symmetrische Zufallsgröße mit besonders schweren Rändern. Sie entsteht beispielsweise als Quotient zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen und weist im Vergleich zur Normalverteilung deutlich stärkere Extremwerte auf. Aufgrund ihrer Eigenschaften besitzt sie weder Erwartungswert noch Varianz, wodurch klassische Lage- und Streuungsmaße nicht definiert sind. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen der Cauchy-Verteilungen sind: $-\infty < x < \infty$, $xq \in \mathbb{R}$, $s > 0$. OQM-Stat stellt Funktionen zur direkten Nutzung der Cauchy-Verteilung bereit, einschließlich Routinen zur Berechnung von Dichte, Verteilungsfunktion, Quantilen sowie zur Simulation entsprechender Zufallswerte.

7.1.1 Standardfunktionen der Cauchy-Verteilung

Standardfunktionen Cauchy-Verteilung
VT_pdf_cauchy(x, t, s)
VT_cdf_cauchy(x, t, s)
VT_inv_cauchy(p, t, s)
VT_rand_cauchy(t, s)

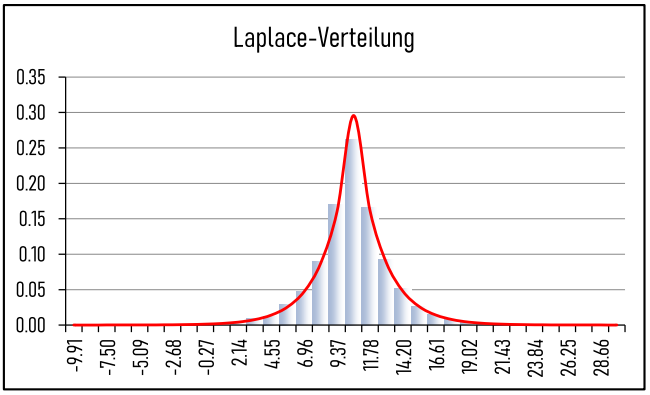
7.1.2 Momente der Cauchy-Verteilungen

Momente der Cauchy-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	nicht definiert
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	nicht definiert
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	nicht definiert
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	nicht definiert

7.1.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Cauchy-Verteilung
VT_Xquer(z( ))
VT_Variance(z( )) ^ 0.5
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z( ), "VT_cdf_cauchy", "b", xq, s)

7.2 Laplace-Verteilung



Die Laplace-Verteilung, auch Doppel-Exponentialverteilung genannt, beschreibt eine stetige, symmetrische Zufallsgröße mit spitzem Gipfel und exponentiell abfallenden Rändern. Sie weist im Vergleich zur Normalverteilung eine stärkere Konzentration um den Lageparameter sowie schwerere Randbereiche auf. Dadurch eignet sie sich besonders zur Modellierung von Daten mit erhöhter Ausreißeranfälligkeit oder abrupten Abweichungen. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $-\infty < x < \infty$, $xq \in \mathbb{R}$, $s > 0$. In OQM-Stat wird die Verteilung durch den Lageparameter *xq* (Median und Erwartungswert) sowie den positiven Skalenparameter *s* definiert. Der Parameter *s* steuert die Streuung und beeinflusst die Breite der Verteilung.

7.2.1 Standardfunktionen der Laplace-Verteilung

Standardfunktionen Laplace-Verteilung
VT_pdf_Laplace(x, xq, s)
VT_cdf_Laplace(x, xq, s)
VT_inv_Laplace(p, xq, s)
VT_rand_Laplace(xq, s)

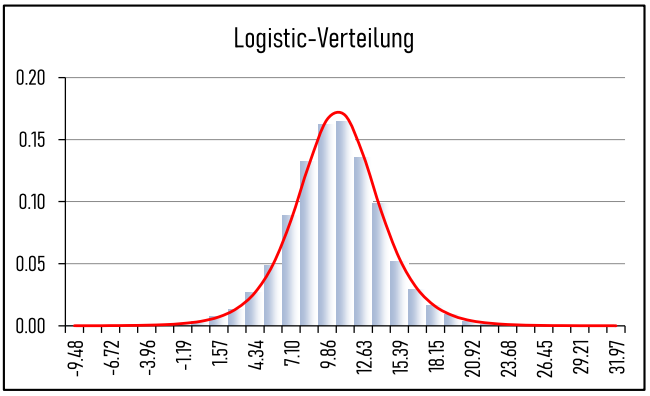
7.2.2 Momente der Laplace-Verteilungen

Momente der Laplace-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_Laplace(xq, s, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_Laplace(xq, s, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_Laplace(xq, s, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_Laplace(xq, s, 4)

7.2.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Laplace-Verteilung
VT_Xquer(z())
VT_Variance(z()) ^ 0.5
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z(), "VT_cdf_laplace", "b", xq, s)

7.3 Logistische Verteilung



Die logistische Verteilung ist eine stetige, symmetrische Verteilung mit einer glockenähnlichen Form, die der Normalverteilung ähnelt, jedoch etwas schwerere Ränder aufweist. Sie wird häufig in der Regressionsanalyse, insbesondere in der logistischen Regression, sowie in Wachstums- und Sättigungsmodellen verwendet. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen der Logistic-Verteilung sind: $-\infty < x < \infty$, $xq \in \mathbb{R}$, $s > 0$. In OQM-Stat wird die Verteilung durch den Lageparameter *xq* (Median, Erwartungswert und Modus) sowie den positiven Skalenparameter *s* definiert.

7.3.1 Standardfunktionen der Logistic-Verteilung

Standardfunktionen Logistic-Verteilung
VT_pdf_Logistic(x, A, B)
VT_cdf_Logistic(x, A, B)
VT_inv_Logistic(p, A, B)
VT_rand_Logistic(A, B)

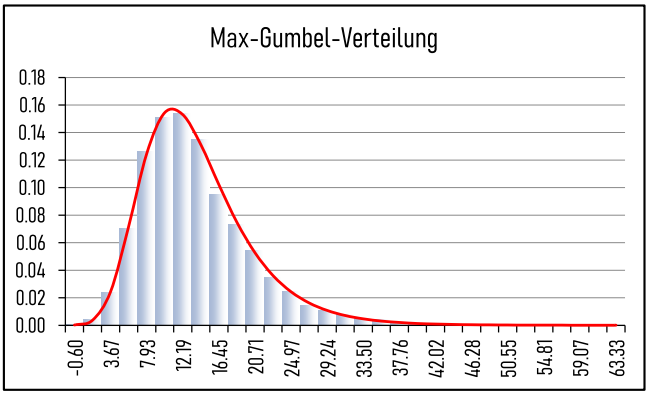
7.3.2 Momente der Logistic-Verteilungen

Momente der Logistic-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_Logistic(A, B, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_Logistic(A, B, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_Logistic(A, B, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_Logistic(A, B, 4)

7.3.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Logistic-Verteilung
VT_Param_A_Logistic(z( ))
VT_Param_B_Logistic(z( ))
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z( ), "VT_cdf_Logistic", "b", A, B)

7.4 Maximum-Gumbel-Verteilung



Die Maximum-Gumbel-Verteilung (Gumbel Typ I für Maxima) ist eine stetige, asymmetrische Extremwertverteilung zur Modellierung von Blockmaxima. Sie beschreibt das Verhalten des größten Wertes aus einer Stichprobe unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen unter geeigneten Voraussetzungen. Typische Anwendungen finden sich in der Extremwertanalyse, etwa bei Hochwasserständen, Windgeschwindigkeiten oder Materialbelastungen. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $-\infty < x < \infty$, $xq \in R$, $s > 0$. Die Maximum-Gumbel-Verteilung ist rechtssteil mit langem rechten Randbereich. Sie gehört zur Klasse der Extremwertverteilungen und bildet den Grenzfall für Maxima bei zugrunde liegenden Verteilungen mit exponentiellem Randverhalten.

7.4.1 Standardfunktionen der Maximum-Gumbel-Verteilung

Standardfunktionen Max-Gumbel-Verteilung
VT_pdf_gumbel1max(x, alpha, beta)
VT_cdf_gumbel1max(x, alpha, beta)
VT_inv_gumbel1max(p, alpha, beta)
VT_rand_gumbel1max(alpha, beta)

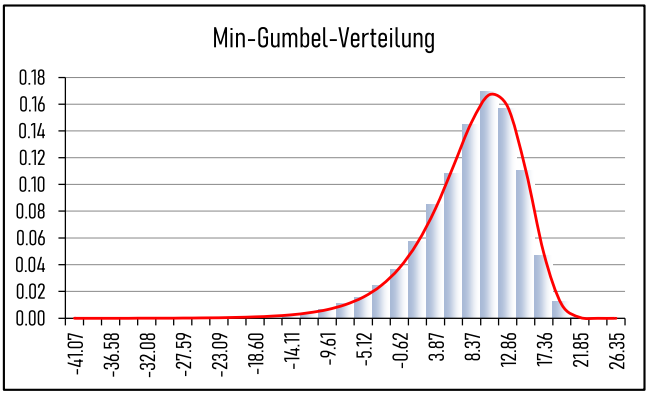
7.4.2 Momente der Maximum-Gumbel-Verteilung

Momente der Max-Gumbel-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_GumbelMax(alpha, beta, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_GumbelMax(alpha, beta, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_GumbelMax(alpha, beta, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_GumbelMax(alpha, beta, 4)

7.4.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Max-Gumbel-Verteilung
VT_param_alpha_Gum1(z( ), beta, "max")
VT_param_beta_Gum1(z( ))
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z( ), "VT_cdf_gumbel1max", "b", alpha, beta)

7.5 Minimum-Gumbel-Verteilung



Die Minimum-Gumbel-Verteilung (Gumbel Typ I für Minima) ist eine stetige, asymmetrische Extremwertverteilung zur Modellierung von Blockminima. Sie beschreibt das Verhalten des kleinsten Wertes aus einer Stichprobe unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen unter geeigneten Voraussetzungen. Typische Anwendungen finden sich in der Zuverlässigkeitsanalyse, etwa bei minimalen Festigkeiten, niedrigsten Temperaturen oder kritischen Grenzwerten. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $-\infty < x < \infty$, $xq \in \mathbb{R}$, $s > 0$. Die Minimum-Gumbel-Verteilung ist linksschief mit langem linken Randbereich. Sie stellt den Extremwert-Grenzfall für Minima bei zugrunde liegenden Verteilungen mit exponentiellem Randverhalten dar und bildet das Gegenstück zur Maximum-Gumbel-Verteilung.

7.5.1 Standardfunktionen der Minimum-Gumbel-Verteilung

Standardfunktionen Min-Gumbel-Verteilung
VT_pdf_gumbel1min(x, alpha, beta)
VT_cdf_gumbel1min(x, alpha, beta)
VT_inv_gumbel1min(p, alpha, beta)
VT_rand_gumbel1min(alpha, beta)

7.5.2 Momente der Minimum-Gumbel-Verteilung

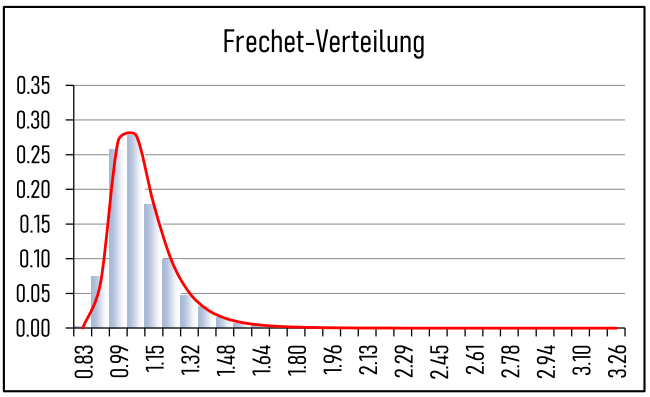
Momente der Min-Gumbel-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_GumbelMin(alpha, beta, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_GumbelMin(alpha, beta, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_GumbelMin(alpha, beta, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_GumbelMin(alpha, beta, 4)

7.5.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Min-Gumbel-Verteilung
VT_param_alpha_Gum1(z(), beta, "min")
VT_param_beta_Gum1(z())
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z(), "VT_cdf_gumbel1min", "b", alpha, beta)

8 Extremwert-Verteilungen

8.1 Ein-Parameter-Fréchet-Verteilung



Die 1-Parameter Fréchet-Verteilung ist eine klassische Extremwertverteilung des Typs II und beschreibt das asymptotische Verhalten von Maxima bei heavy-tailed Grundverteilungen. Sie ist durch einen einzigen positiven Formparameter aaa charakterisiert, der das Randverhalten und damit die Stärke der Extremwertdominanz steuert. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: x > 0, alpha > 0. Der Parameter alpha bestimmt die Tail-Schwere der Verteilung. Kleine Werte von alpha führen zu besonders schweren rechten Rändern und hoher Extremwertwahrscheinlichkeit, während größere Werte zu moderaterem Randverhalten führen. Mit zunehmendem alpha wird die Verteilung weniger stark heavy-tailed. Sie eignet sich insbesondere für analytische Untersuchungen des Tail-Index sowie für Simulationen von Extremereignissen.

8.1.1 Standardfunktionen der Fréchet-Verteilung

Standardfunktionen Frechet-Verteilung
VT_pdf_frechet1(x, alpha)
VT_cdf_frechet1(x, alpha)
VT_inv_frechet1(p, alpha)
VT_rand_frechet1(alpha)

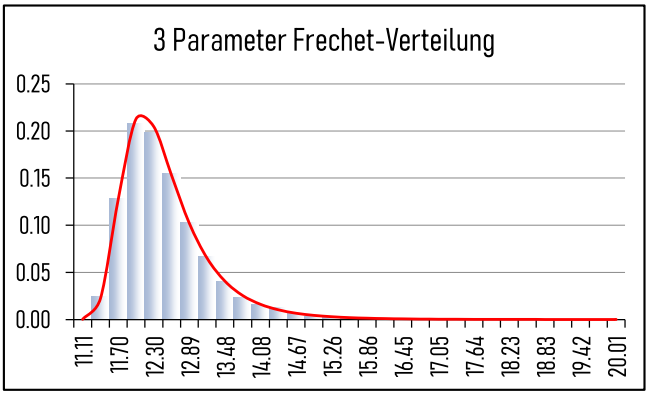
8.1.2 Momente der Fréchet-Verteilung

Momente der Frechet-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_Frechet1(alpha, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_Frechet1(alpha, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_Frechet1(alpha, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_Frechet1(alpha, 4)

8.1.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Frechet-Verteilung
VT_Param_Frechet_alpha(z())
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z(), "VT_cdf_Frechet1", "b", alpha)

8.2 Drei-Parameter-Fréchet-Verteilung



Die 3-Parameter Fréchet-Verteilung ist die vollständig parametrisierte Form der Extremwertverteilung vom Typ II und erweitert die standardisierte Variante um Lage- und Skalierungsparameter. Sie wird durch den Formparameter β, den Skalenparameter α sowie den Lageparameter γ beschrieben. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $x > \gamma$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.
Der Formparameter β kontrolliert das Tail-Verhalten und bestimmt die Stärke der Extremwertdominanz. Kleine Werte von β führen zu sehr schweren rechten Rändern, während größere Werte das Randverhalten abschwächen. Der Skalenparameter α beeinflusst die Streuung der Verteilung, während der Lageparameter γ den unteren Definitionsbereich verschiebt. Die 3-Parameter Fréchet-Verteilung ist geeignet zur Modellierung extremer Naturereignisse, finanzieller Verlustrisiken, Belastungsgrenzen technischer Systeme sowie bei Maxima-Modellen mit stark rechtsschiefem Verlauf.

8.2.1 Standardfunktionen der 3-Parameter Fréchet-Verteilung

Standardfunktionen Frechet3-Verteilung
VT_pdf_Frechet3(x, xmin, alpha, beta)
VT_cdf_Frechet3(x, xmin, alpha, beta)
VT_inv_Frechet3(p, xmin, alpha, beta)
VT_rand_Frechet3(xmin, alpha, beta)

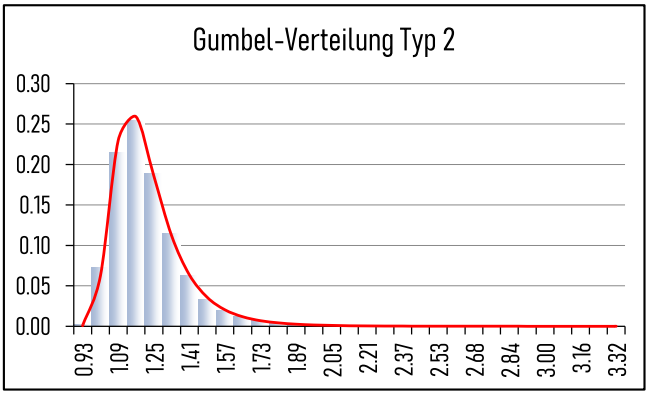
8.2.2 Momente der 3-Parameter Fréchet-Verteilung

Momente der Frechet3-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_Frechet3(xmin, alpha, beta, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_Frechet3(xmin, alpha, beta, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_Frechet3(xmin, alpha, beta, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_Frechet3(xmin, alpha, beta, 4)

8.2.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Frechet3-Verteilung
VT_Param_Frechet3_xmin(z())
VT_Param_Frechet3_alpha(z(), xmin, beta)
VT_Param_Frechet3_beta(z(), xmin)
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z(), "VT_cdf_Frechet3", "b", xmin, alpha, beta)

8.3 Gumbel-Verteilung Typ 2



Die Gumbel Typ II-Verteilung, auch als Fréchet-Verteilung bezeichnet, ist eine stetige, stark rechtsschiefe Extremwertverteilung. Sie dient zur Modellierung von Blockmaxima bei zugrunde liegenden Verteilungen mit schwerem Randverhalten (Heavy Tails). Im Gegensatz zur Gumbel Typ I-Verteilung besitzt sie einen polynomial abfallenden rechten Randbereich. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $x > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$
Die Verteilung wird durch den positiven Skalenparameter α sowie den positiven Formparameter β definiert. Der Parameter α steuert die Lage und Skalierung der Verteilung, während β die Stärke des Randverhaltens bestimmt. Kleine Werte von β führen zu besonders schweren Rändern und erhöhter Extremwahrscheinlichkeit. Die Gumbel Typ II-Verteilung findet Anwendung in der Extremwertstatistik, Finanzmathematik, Risikomodellierung sowie in technischen Sicherheitsanalysen, wenn besonders große Ausprägungen mit signifikanter Wahrscheinlichkeit auftreten können.

8.3.1 Standardfunktionen der Minimum-Gumbel-Verteilung

Standardfunktionen Gumbel2-Verteilung
VT_pdf_Gumbel2(x, alpha, beta)
VT_cdf_Gumbel2(x, alpha, beta)
VT_inv_Gumbel2(p, alpha, beta)
VT_rand_Gumbel2(alpha, beta)

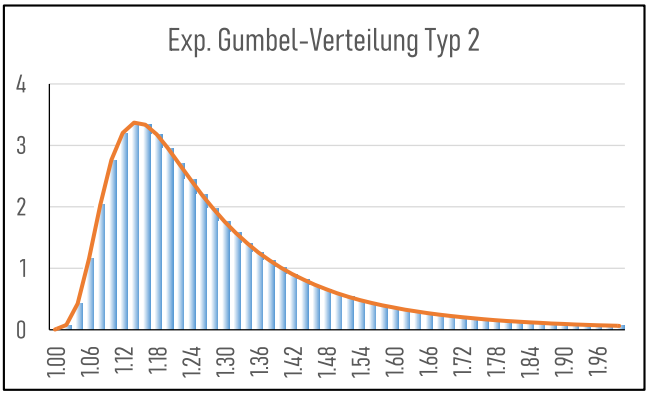
8.3.2 Momente der Minimum-Gumbel-Verteilung

Momente der Gumbel2-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_Gumbel2(alpha, beta, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_Gumbel2(alpha, beta, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_Gumbel2(alpha, beta, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_Gumbel2(alpha, beta, 4)

8.3.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Gumbel-Verteilung Typ 2
VT_Param_Gumbel2_alpha(ByVal z As Range, ByVal beta As Double)
VT_Param_Gumbel2_beta(ByVal z As Range)
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_general(z( ), "VT_cdf_Gumbel2", "b", alpha, beta)

8.4 Exponentielle Gumbel-Verteilung Typ 2



Die exponentielle Gumbel Typ II-Verteilung ist eine erweiterte Extremwertverteilung, die aus der Gumbel Typ II-Verteilung durch zusätzliche exponentielle Transformation hervorgeht. Sie gehört zur Klasse der Exponentiated-Verteilungen und ermöglicht eine besonders flexible Modellierung von stark rechtsschiefen, heavy-tailed Zufallsgrößen. Definitionsbereich und Parameterbedingungen: $x > 0, \alpha > 0, \varphi > 0, \theta > 0$

Der Parameter φ steuert das Randverhalten, α beeinflusst die Skalierung, während θ als zusätzlicher Formparameter die Krümmung der Verteilungsfunktion modifiziert. Durch Variation dieser Parameter lassen sich unterschiedliche Schiefegrade und Tail-Charakteristika erzeugen. Diese Verteilung eignet sich insbesondere für Anwendungen in der Extremwertstatistik, Risikomodellierung, Finanzmathematik sowie bei technischen Sicherheitsanalysen.

8.4.1 Standardfunktionen der Exp. Gumbel-Verteilung Typ 2

Standardfunktionen exp. Gumbel2-Verteilung
VT_pdf_expgumbel2(x, alpha, phi, theta)
VT_cdf_expgumbel2(x, alpha, phi, theta)
VT_inv_expgumbel2(p, alpha, phi, theta)
VT_rand_expgumbel2(alpha, phi, theta)

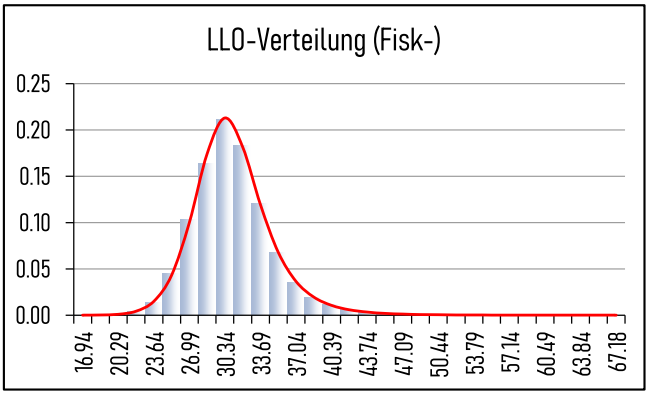
8.4.2 Momente der Exp. Gumbel-Verteilung Typ 2

Momente der exp. Gumbel2-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_expGumbel2(alpha, phi, theta, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_expGumbel2(alpha, phi, theta, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_expGumbel2(alpha, phi, theta, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_expGumbel2(alpha, phi, theta, 4)

8.4.3 Schätzung der Parameter

Startwerte exp. Gumbel-Verteilung Typ 2
VT_param_ExpGumbel2_alpha(z( ), theta, phi)
VT_param_ExpGumbel2_phi(z( ), theta)
VT_param_ExpGumbel2_theta(z( ))
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(z( ), "Vt_cdf_expgumbel2","b", alpha, phi, theta)

8.5 Loglogistische Verteilung (Fisk-)



Die loglogistische Verteilung ist eine stetige, rechts-schiefe Verteilung mit schwerem Randverhalten. Sie entsteht, wenn der Logarithmus einer Zufallsgröße einer logistischen Verteilung folgt. Aufgrund ihrer flexiblen Form eignet sie sich besonders zur Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten oder ökonomischen Größen mit ausgeprägtem rechten Rand. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $x > xmin$, $s > 0$, $k > 0$. Die Verteilung wird durch die Intervallverschiebung *xmin*, den positiven Skalenparameter *s* sowie den positiven Formparameter *k* definiert. Der Parameter *xmin* verschiebt die Verteilung entlang der x-Achse, *s* bestimmt die Streuung, während *k* die Form und insbesondere die Stärke der Schiefe beeinflusst. Die loglogistische Verteilung findet Anwendung in der Zuverlässigkeitsanalyse, Überlebenszeitanalyse, Hydrologie sowie in ökonomischen Modellen mit asymmetrischem Wachstumsverhalten.

8.5.1 Standardfunktionen der LLO-Verteilung

Standardfunktionen der LLO-Verteilung
VT_pdf_loglogistic(x, xmin, s, k)
VT_cdf_loglogistic(x, xmin, s, k)
VT_inv_loglogistic(p, xmin, s, k)
VT_rand_loglogistic(xmin, s, k)

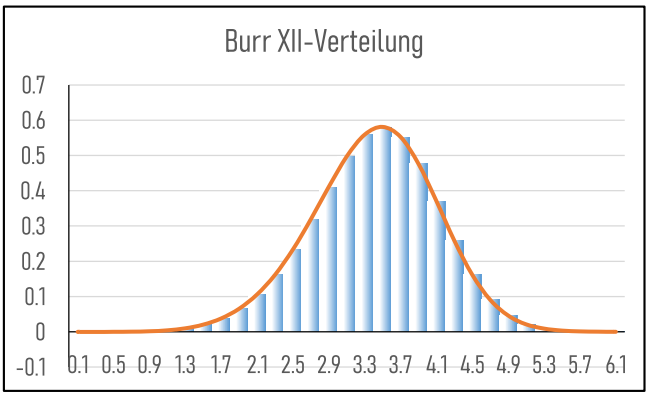
8.5.2 Momente der LLO-Verteilung

Momente der LLO-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_LogLogistic(xmin, s, k, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_LogLogistic(xmin, s, k, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_LogLogistic(xmin, s, k, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_LogLogistic(xmin, s, k, 4)

8.5.3 Schätzung der Parameter

Startwerte LLO-Verteilung
VT_Param_LLo(z(), "xmin")
VT_Param_LLo(z(), "s")
VT_Param_LLo(z(), "k")
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(z(), "VT_cdf_loglogistic","b", xmin, s, k)

8.6 Burr-Verteilung Typ XII



Die Burr XII-Verteilung ist eine stetige, rechts-schiefe Verteilung mit flexibel steuerbarem Randverhalten. Sie gehört zur Familie der Burr-Verteilungen und zeichnet sich durch ihre große Anpassungsfähigkeit an unterschiedlich stark ausgeprägte Schiefe- und Heavy-Tail-Strukturen aus. Je nach Parameterwahl kann sie sowohl moderat als auch stark heavy-tailed sein. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $x > 0, a > 0, b > 0, c > 0$. Die Verteilung wird durch den positiven Skalenparameter a sowie die beiden positiven Formparameter b und c definiert. Der Parameter a steuert die Skalierung der Verteilung, während b und c gemeinsam die Form, Schiefe und das Randverhalten bestimmen. Die Burr XII-Verteilung findet Anwendung in der Einkommensverteilung, Lebensdaueranalyse, Hydrologie, Versicherungsmathematik sowie in der Modellierung ökonomischer und technischer Heavy-Tail-Prozesse.

8.6.1 Standardfunktionen der Burr XII-Verteilung

Standardfunktionen der Burr_XII-Verteilung
VT_pdf_Burr_XII(x, a, b, c)
VT_cdf_Burr_XII(x, a, b, c)
VT_inv_Burr_XII(p, a, b, c)
VT_rand_Burr_XII(a, b, c)

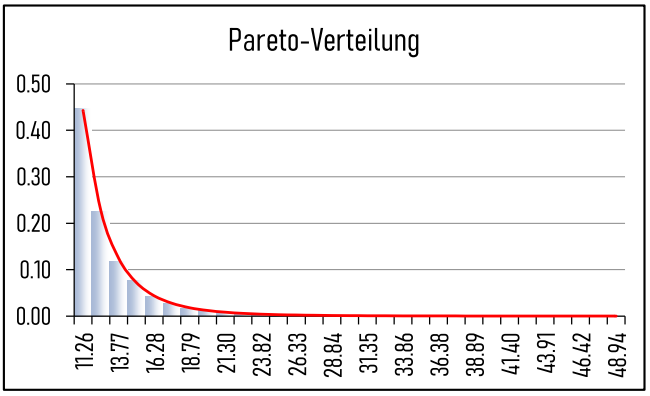
8.6.2 Momente der Burr XII-Verteilung

Momente der Burr_XII-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_Burr_XII(a, b, c, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_Burr_XII(a, b, c, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_Burr_XII(a, b, c, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_Burr_XII(a, b, c, 4)

8.6.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Burr_XII-Verteilung
VT_Param_Burr_XII(z( ), "a")
VT_Param_Burr_XII(z( ), "b")
VT_Param_Burr_XII(z( ), "c")
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(z( ), "VT_cdf_Burr_XII", "b", a, b, c)

8.7 Pareto-Verteilung



Die Pareto-Verteilung ist eine stetige, stark rechtsschiefe Heavy-Tail-Verteilung zur Modellierung von Größen mit ausgeprägtem Randverhalten. Sie wird zur Beschreibung von Einkommensverteilungen, Vermögensstrukturen, Schadenshöhen oder anderen Prozessen mit seltenen, aber sehr großen Ausprägungen verwendet. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $x \geq xm$, $xm > 0$, $\alpha > 0$.
Die Verteilung wird durch den positiven Schwellenparameter *xm* sowie den positiven Formparameter α definiert. Der Parameter *xm* legt die untere Schranke des Wertebereichs fest, während α die Stärke des Randverhaltens bestimmt. Kleine Werte von α führen zu besonders schweren Rändern und erhöhter Wahrscheinlichkeit extremer Werte. Die Pareto-Verteilung findet Anwendung in der Finanzmathematik, Risikomodellierung, Versicherungsmathematik, Ökonomie sowie in technischen Systemen mit power-law-Verhalten.

8.7.1 Standardfunktionen der Pareto-Verteilung

Standardfunktionen der Pareto-Verteilung
VT_pdf_pareto(x, xm, alpha)
VT_cdf_pareto(x, xm, alpha)
VT_inv_pareto(p, xm, alpha)
VT_rand_pareto(xm, alpha)

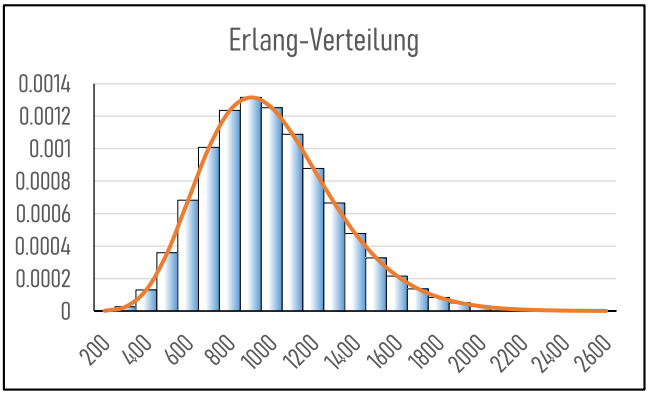
8.7.2 Momente der Pareto-Verteilung

Momente der Pareto-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_Pareto(xm, alpha, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_Pareto(xm, alpha, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_Pareto(xm, alpha, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_Pareto(xm, alpha, 4)

8.7.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Pareto-Verteilung
VT_Param_Pareto(z( ), "xm")
VT_Param_Pareto(z( ), "alpha")
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(z( ), "VT_cdf_Pareto", "b", xm, alpha)

8.8 Erlang-Verteilung



Die Erlang-Verteilung ist eine stetige, rechts-schiefe Verteilung zur Modellierung von Wartezeiten bis zum Eintreten des k-ten Ereignisses in einem Poisson-Prozess mit konstanter Ereignisrate λ. Sie stellt einen Spezialfall der Gamma-Verteilung dar, bei dem der Formparameter k ganzzahlig ist. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen: $x \geq 0, k \in \mathbb{N}, \lambda > 0$
Die Verteilung wird durch den ganzzahligen Formparameter k sowie den positiven Rate-Parameter λ definiert. Der Parameter k bestimmt die Anzahl der aufeinanderfolgenden Ereignisse, während λ die Intensität des zugrunde liegenden Prozesses beschreibt. Mit wachsendem k wird die Verteilung zunehmend symmetrischer und nähert sich für große Werte einer Normalverteilung an. Die Erlang-Verteilung findet breite Anwendung in der Warteschlangentheorie, Zuverlässigkeitsanalyse, Telekommunikation sowie bei stochastischen Prozessmodellen mit mehreren aufeinanderfolgenden Ereignissen.

8.8.1 Standardfunktionen der Erlang-Verteilung

Standardfunktionen der Erlang-Verteilung
VT_pdf_Erlang(x, k, lambda)
VT_cdf_Erlang(x, k, lambda)
VT_inv_Erlang(p, k, lambda)
VT_rand_Erlang(k, lambda)

8.8.2 Momente der Erlang-Verteilung

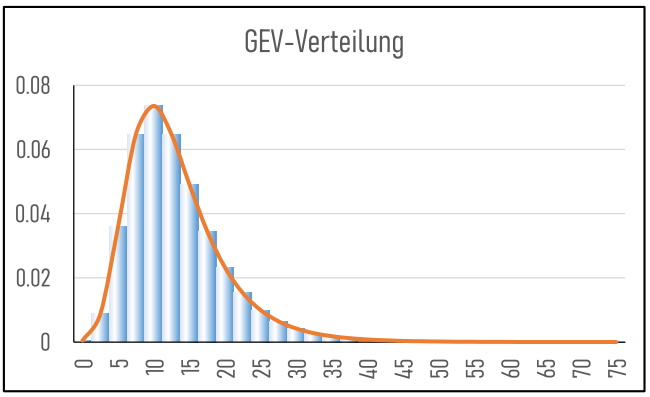
Momente der Erlang-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_Erlang(k, lambda, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_Erlang(k, lambda, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_Erlang(k, lambda, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_Erlang(k, lambda, 4)

8.8.3 Schätzung der Parameter

Startwerte Erlang-Verteilung
VT_Param_Erlang(z( ), "k")
VT_Param_Erlang(z( ), "lambda")
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(z( ), "VT_cdf_Erlang", "b", k, lambda)

9 Verallgemeinerte Verteilungen

9.1 Verallgemeinerte Extremwert-Verteilungen (GEV)



Die verallgemeinerte Extremwert-Verteilung (Generalized Extreme Value, GEV) ist eine stetige Verteilung zur Modellierung von Blockextremen. Damit bildet die GEV-Verteilung den zentralen Rahmen der modernen Extremwertstatistik. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $[1 + \xi(x - \mu) / \sigma] > 0, \sigma > 0, \xi \in \mathbb{R}$. Die Verteilung wird durch den Lageparameter μ, den positiven Skalenparameter σ sowie den Formparameter ξ definiert. Der Parameter μ verschiebt die Verteilung entlang der x-Achse, σ steuert die Streuung, während ξ das Randverhalten bestimmt.

- Für $\xi = 0$ ergibt sich die Gumbel-Verteilung (exponentieller Rand).
- Für $\xi > 0$ entsteht ein schwerer, polynomialer Rand (Fréchet-Typ).
- Für $\xi < 0$ besitzt die Verteilung eine obere Endgrenze (Weibull-Typ).

OQM-Stat stellt Funktionen zur direkten Nutzung der GEV-Verteilung bereit, einschließlich Routinen zur Berechnung von Dichte, Verteilungsfunktion, Quantilen sowie zur Simulation entsprechender Zufallswerte. Der Grenzfall $\xi = 0$ wird numerisch stabil als Gumbel-Verteilung behandelt. Die GEV-Verteilung findet Anwendung in der Hydrologie (Hochwasseranalyse), Klimaforschung, Finanzrisikomodellen, Zuverlässigkeitstechnik sowie in der Bewertung seltener Extremereignisse mit potenziell hohen Auswirkungen.

9.1.1 Standardfunktionen der GEV-Verteilung

Standardfunktionen der GEV-Verteilung
VT_pdf_genExtremWert(x, mu, sigma, xi)
VT_cdf_genExtremWert(x, mu, sigma, xi)
VT_inv_genExtremWert(p, mu, sigma, xi)
VT_rand_genExtremWert(mu, sigma, xi)

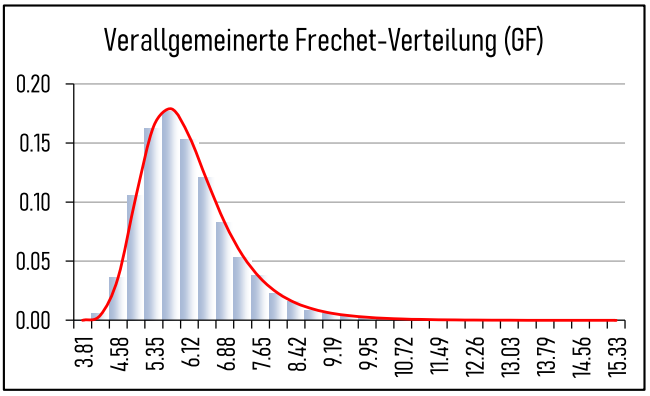
9.1.2 Momente der GEV-Verteilung

Momente derGEV-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_GEV(mu, sigma, xi, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_GEV(mu, sigma, xi, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_GEV(mu, sigma, xi, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_GEV(mu, sigma, xi, 4)

9.1.3 Schätzung der Parameter

Startwerte GEV-Verteilung
VT_Param_GEV(z(), "mu")
VT_Param_GEV(z(), "sigma")
VT_Param_GEV z(), "xi")
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(z(), "VT_cdf_GEV", "b", mu, sigma, xi)

9.2 Verallgemeinerte Frechet-Verteilungen (GF)



Die verallgemeinerte Fréchet-Verteilung ist eine stetige, stark rechtsschiefe Heavy-Tail-Verteilung mit zusätzlichem Formparameter. Sie erweitert die klassische Fréchet-Verteilung um eine zusätzliche Flexibilitätskomponente und gehört zur Familie der exponentiierten Extremwertmodelle. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $x > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$
Die Verteilung wird durch drei positive Parameter α, β und γ definiert. Der Parameter γ steuert die Skalierung der Verteilung, β beeinflusst das Randverhalten und die Steilheit im unteren Bereich, während α als zusätzlicher Formparameter die Gesamtkrümmung der Verteilungsfunktion modifiziert. Für $\alpha=1$ reduziert sich die Verteilung auf die klassische Fréchet-Verteilung. Durch Variation von α lassen sich unterschiedliche Schiefegrade und Tail-Charakteristika erzeugen. Die verallgemeinerte Fréchet-Verteilung eignet sich besonders zur Modellierung von Extremereignissen mit starkem Heavy-Tail-Verhalten, beispielsweise in der Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Hydrologie oder technischen Sicherheitsanalysen.

9.2.1 Standardfunktionen der Frechet-Verteilungen (GF)

Standardfunktionen der GF-Verteilung
VT_pdf_genfrechet(x, alpha, beta, gamma)
VT_cdf_genfrechet(x, alpha, beta, gamma)
VT_inv_genfrechet(p, alpha, beta, gamma)
VT_pdf_genfrechet(alpha, beta, gamma)

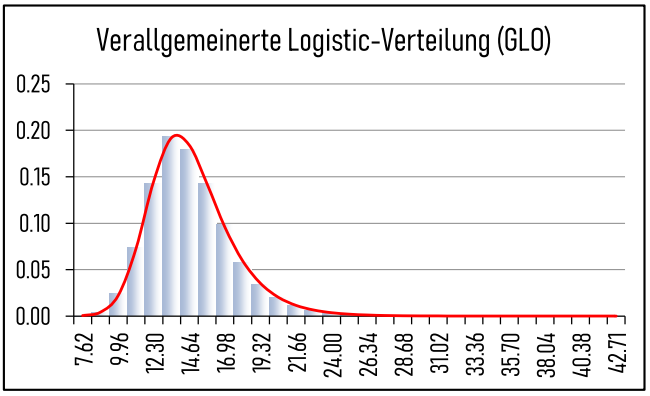
9.2.2 Momente der Frechet-Verteilungen (GF)

Momente derGF-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_GenFrechet(alpha, beta, gamma, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_GenFrechet(alpha, beta, gamma, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_GenFrechet(alpha, beta, gamma, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_GenFrechet(alpha, beta, gamma, 4)

9.2.3 Schätzung der Parameter

Startwerte GF-Verteilung
VT_Param_GF(z( ), "alpha")
VT_Param_GF(z( ), "beta")
VT_Param_GF(z( ), "gamma")
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(z( ), "VT_cdf_genfrechet", "b", alpha, beta, gamma)

9.3 Verallgemeinerte Logistic-Verteilungen (GLO)



Die verallgemeinerte logistische Verteilung ist eine stetige, flexible Erweiterung der klassischen logistischen Verteilung mit zusätzlichem Formparameter. Sie ermöglicht die Modellierung symmetrischer wie auch asymmetrischer Verteilungsformen und bietet eine variable Kontrolle über die Steilheit und das Randverhalten. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $-\infty < x < \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$. Die Verteilung wird durch den Lageparameter μ, den positiven Skalenparameter σ sowie den positiven Formparameter α definiert. Der Parameter μ verschiebt die Verteilung entlang der x-Achse, σ bestimmt die Streuung, während α die Form der Verteilung steuert.

- Für $\alpha = 1$ ergibt sich die klassische logistische Verteilung.
- Für $\alpha > 1$ entsteht eine stärker gekrümmte, steilere Verteilungsform.
- Für $\alpha < 1$ werden die Ränder ausgeprägter und die Verteilung flacher.

Die verallgemeinerte logistische Verteilung findet Anwendung in der Regressionsanalyse, Wachstumsmodellen, Überlebenszeitanalyse sowie bei Prozessen mit sigmoidem Verlauf oder variabler Schiefe.

9.3.1 Standardfunktionen der Logistic-Verteilungen (GLO)

Standardfunktionen der GLO-Verteilung
VT_pdf_genlogistic(x, mu, sigma, alpha)
VT_cdf_genlogistic(x, mu, sigma, alpha)
VT_inv_genlogistic(p, mu, sigma, alpha)
VT_rand_genlogistic(mu, sigma, alpha)

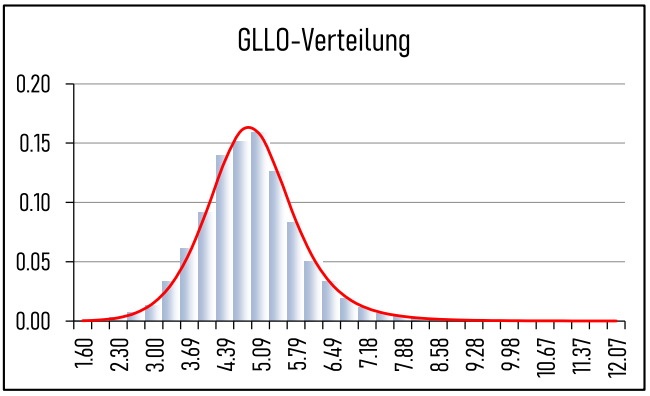
9.3.2 Momente der Logistic-Verteilungen (GLO)

Momente derGLO-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_GenLogistic(mu, sigma, alpha, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_GenLogistic(mu, sigma, alpha, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_GenLogistic(mu, sigma, alpha, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_GenLogistic(mu, sigma, alpha, 4)

9.3.3 Schätzung der Parameter

Startwerte GLO-Verteilung
VT_Param_GLO(z(), "mu")
VT_Param_GLO(z(), "sigma")
VT_Param_GLO(z(), "alpha")
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(z(), "VT_cdf_genlogistic", "b", mu, sigma, alpha)

9.4 Verallgemeinerte Loglogistic-Verteilungen (GLLO)



Die verallgemeinerte loglogistische Verteilung ist eine stetige, rechts-schiefe Heavy-Tail-Verteilung mit erhöhter Formflexibilität. Sie erweitert die klassische loglogistische Verteilung um einen zusätzlichen Formparameter und ermöglicht dadurch eine besonders differenzierte Anpassung an empirische Daten mit ausgeprägtem Randverhalten.Definitionsbereich und Parameterbedingungen: $x > xmin, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$

Die Verteilung wird durch die Verschiebungsgrenze *xmin*, den positiven Skalenparameter α sowie die beiden positiven Formparameter β und γ definiert. Der Parameter *xmin* legt die untere Schranke des Wertebereichs fest. Der Skalenparameter α steuert die Streuung, während β und γ gemeinsam die Krümmung, Schiefe und das Tail-Verhalten bestimmen. Für spezielle Parameterkombinationen reduziert sich das Modell auf die klassische loglogistische Verteilung. Durch Variation der Formparameter lassen sich unterschiedliche Randintensitäten sowie unimodale oder stark heavy-tailed Verläufe erzeugen. Die verallgemeinerte loglogistische Verteilung eignet sich besonders zur Modellierung von Lebensdauern, Einkommensverteilungen, hydrologischen Extremwerten sowie ökonomischen oder technischen Prozessen mit ausgeprägtem Heavy-Tail-Verhalten.

9.4.1 Standardfunktionen der Loglogistic-Verteilungen (GLLO)

Standardfunktionen der GLLO-Verteilung
VT_pdf_genloglogistic(x, xmin, alpha, beta, gamma)
VT_cdf_genloglogistic(x, xmin, alpha, beta, gamma)
VT_inv_genloglogistic(p, xmin, alpha, beta, gamma)
VT_rand_genloglogistic(xmin, alpha, beta, gamma)

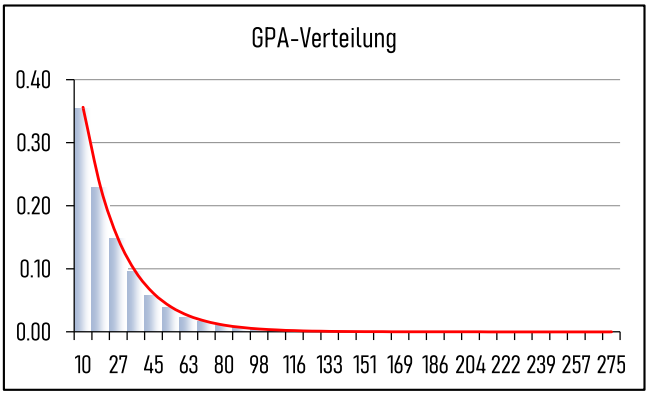
9.4.2 Momente der Loglogistic-Verteilungen (GLLO)

Momente derGLLO-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_GenLogLogistic(xmin, alpha, beta, gamma, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_GenLogLogistic(xmin, alpha, beta, gamma, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_GenLogLogistic(xmin, alpha, beta, gamma, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_GenLogLogistic(xmin, alpha, beta, gamma, 4)

9.4.3 Schätzung der Parameter

Startwerte GLLO-Verteilung
VT_Param_GLLO(z(), "xmin")
VT_Param_GLLO(z(), "alpha")
VT_Param_GLLO(z(), "beta")
VT_Param_GLLO(z(), "gamma")
bei bekannten xmin
VT_Param_GLL(z(), xmin, "alpha")
VT_Param_GLL(z(), xmin, "beta")
VT_Param_GLL(z(), xmin. "gamma")
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(z(), "VT_cdf_genloglogistic", "b", xmin, alpha, beta, gamma)

9.5 Verallgemeinerte Pareto-Verteilungen (GPA)



Die verallgemeinerte Pareto-Verteilung (Generalized Pareto Distribution, GPA) ist eine stetige Verteilung zur Modellierung von Extremwertüberschreitungen. Sie beschreibt die Verteilung von Werten oberhalb einer Schwelle und bildet einen zentralen Bestandteil der Extremwerttheorie im Peaks-over-Threshold-Ansatz. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $[1 + c(x - a) / b] > 0, b > 0, c \in \mathbb{R}$. Die Verteilung wird durch den Schwellenparameter a, den positiven Skalenparameter b sowie den Formparameter c definiert. Der Parameter a legt die untere Schwelle fest, b steuert die Streuung, während c das Randverhalten bestimmt:

- Für $c = 0$ ergibt sich die Exponentialverteilung.
- Für $c > 0$ entsteht ein schwerer, polynomialer Rand (Heavy-Tail-Verhalten).
- Für $c < 0$ besitzt die Verteilung eine obere Endgrenze.

Die verallgemeinerte Pareto-Verteilung findet breite Anwendung in der Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Hydrologie, Klimaforschung sowie in technischen Sicherheitsanalysen zur Bewertung seltener Extremereignisse oberhalb definierter Schwellenwerte.

9.5.1 Standardfunktionen der Pareto-Verteilungen (GPA)

Standardfunktionen der GPA-Verteilung
VT_pdf_genpareto(x, A, B, C)
VT_cdf_genpareto(x, A, B, C)
VT_inv_genpareto(p, A, B, C)
VT_rand_genpareto(A, B, C)

9.5.2 Momente der Pareto-Verteilungen (GPA)

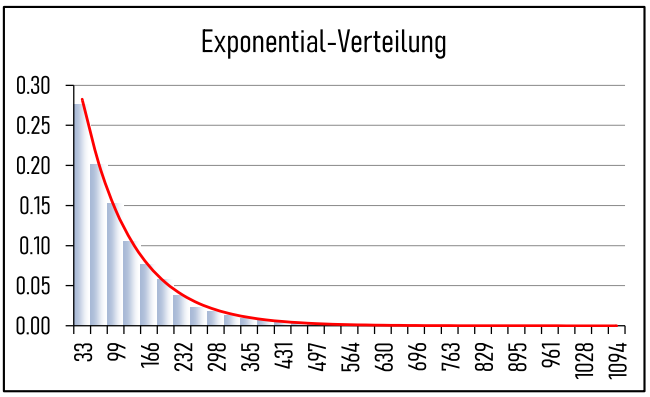
Momente derGPA-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_GPA(A, B, C, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_GPA(A, B, C, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_GPA(A, B, C, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_GPA(A, B, C, 4)

9.5.3 Schätzung der Parameter

Startwerte GPA-Verteilung
VT_Param_GPA(z( ), "A")
VT_Param_GPA(z( ), "B")
VT_Param_GPA(z( ), "C")
AD-Test und Optimierungssumme
VT_AD_Test_General(z( ), "VT_cdf_genpareto", "b", A, B, C)

10 Lebensdauer-Verteilungen

10.1 Exponential-Verteilung [mit Shift]



Die Exponentialverteilung ist eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung für positive Zufallsgrößen und beschreibt typischerweise Wartezeiten bis zum Auftreten eines einzelnen Ereignisses bei konstanter Ereignisrate. Sie stellt einen Spezialfall der Gamma-Verteilung dar und wird häufig in Zuverlässigkeitsanalysen, Warteschlangenmodellen sowie bei Ausfall- und Lebensdauerunterschungen eingesetzt. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen: $0 < x < \infty, \lambda > 0$
Der Parameter λ ist definiert durch $1/T$, wobei T die mittlere Lebendauer (MTTF, MTBF oder MTTR) ist. Charakteristisch für die Exponentialverteilung ist ihre Gedächtnislosigkeitseigenschaft, wodurch sie sich besonders zur Beschreibung zufälliger Ereignisprozesse mit konstanter Intensität eignet. Entsprechende Funktionen unterstützen Simulationen, Risikoabschätzungen und analytische Bewertungen innerhalb statistischer Workflows.

10.1.1 Standardfunktionen der Exponential-Verteilung

Standardfunktionen der Exponential-Verteilung
VT_pdf_exponential(x, T) [mit x = t - tmin]
VT_cdf_exponential(x, T) [mit x = t - tmin]
VT_inv_exponential(p, T) [+ (tmin)]
VT_rand_exponential(T) [+ (tmin)]

10.1.2 Momente der Exponential-Verteilung

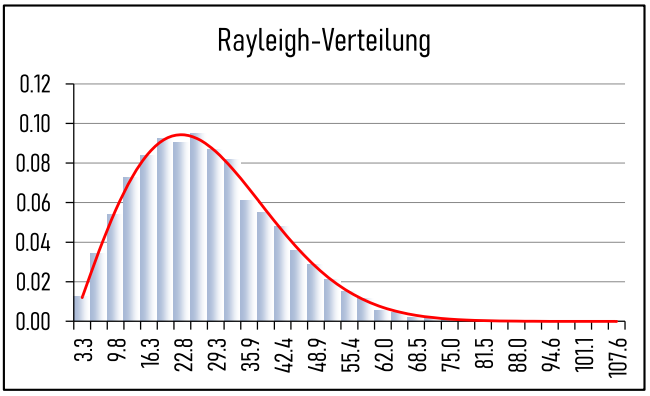
Momente der Exponential-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_Exp(1/T, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_Exp(1/T, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_Exp(1/T, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_Exp(1/T, 4)

10.1.3 Schätzung des Parameters

Parameter Exponential-Verteilung
VT_Param_Exponential_Lambda(z())
JB-Test zur Prüfung der Anpassung
VT_JB_Test_Exp(z())

Da die Exponential-Verteilung einen fest vorgegeben Shape-Parameter (Ausfallsteilheit b = 1) hat und nur durch einen Scale-Parameter (charakteristische Lebensdauer T) definiert ist, kann der Anderson-Darling-Test nicht verwendet werden. Der angepasste Jarque-Bera-Test zeigt das erwartete asymptotische Verhalten, mit wachsendem Stichprobenumfang steigt die Teststärke deutlich an, sodass auch geringe Abweichungen von der Zielverteilung erkannt werden. Für kleine Stichproben bleibt der Test erwartungsgemäß konservativ. Simulationen mit exakt passenden Verteilungen führen zu keinen signifikanten Ergebnissen, was die Korrektheit der Implementierung bestätigt.

10.2 Rayleigh-Verteilung [mit Shift]



Die Rayleigh-Verteilung, auch als Betragsverteilung 2. Art bezeichnet, ist eine stetige, rechts-schiefe Verteilung für nichtnegative Zufallsgrößen. Sie entsteht als Verteilung des Betrags eines zweidimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit identischer Varianz in beiden Komponenten. Typische Anwendungen finden sich in der Signalverarbeitung, Physik, Windgeschwindigkeitsanalyse und Zuverlässigkeitstechnik. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $x \geq xmin$, $s > 0$. Die Verteilung wird durch einen positiven Skalenparameter *s* sowie optional durch eine Untergrenze *xmin* definiert. Der Parameter *s* steuert die Streuung und Lage des Dichtemaximums. Für $xmin = 0$ ergibt sich die klassische Rayleigh-Verteilung; durch eine Verschiebung kann die Verteilung auf ein Intervall $[xmin, \infty]$ erweitert werden. Die Rayleigh-Verteilung eignet sich besonders zur Modellierung von Amplituden, Geschwindigkeiten oder Intensitäten, die als Resultierende zweier unabhängiger normalverteilter Komponenten entstehen.

10.2.1 Standardfunktionen der Rayleigh-Verteilung

VT_pdf_rayleigh(x, T) [mit x = t - tmin]
VT_cdf_rayleigh(x, T) [mit x = t - tmin]
VT_inv_rayleigh(p, T) [+ (tmin)]
VT_rand_rayleigh(T) [+ (tmin)]

10.2.2 Momente der Rayleigh-Verteilung

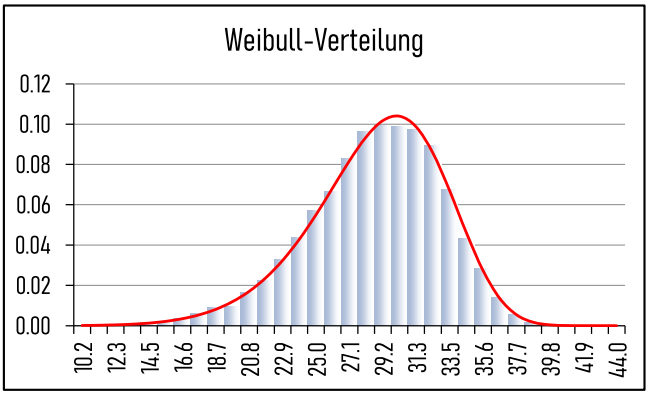
Momente der Rayleigh-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z(), 1, 0)	VT_MoM_Rayleigh(T, 1)
Var	VT_Momente(z(), 2, 0)	VT_MoM_Rayleigh(T, 2)
Skewness	VT_Momente(z(), 3, 0)	VT_MoM_Rayleigh(T, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z(), 4, 0)	VT_MoM_Rayleigh(T, 4)

10.2.3 Schätzung der Parameter

Parameter Rayleigh-Verteilung
VT_Param_Rayleigh_T(z())
JB-Test zur Prüfung der Anpassung
VT_JB_Test_Rayleigh(z())

Da die Rayleigh-Verteilung einen fest vorgegeben Shape-Parameter (Ausfallsteilheit b = 2) hat und nur durch einen Scale-Parameter (charakteristische Lebensdauer T) definiert ist, kann der Anderson-Darling-Test nicht verwendet werden. Der angepasste Jarque-Bera-Test zeigt das erwartete asymptotische Verhalten, mit wachsendem Stichprobenumfang steigt die Teststärke deutlich an, sodass auch geringe Abweichungen von der Zielverteilung erkannt werden. Für kleine Stichproben bleibt der Test erwartungsgemäß konservativ. Simulationen mit exakt passenden Verteilungen führen zu keinen signifikanten Ergebnissen, was die Korrektheit der Implementierung bestätigt.

10.3 Weibull-Verteilung (mit Shift)



Die Weibull-Verteilung ist eine stetige, rechts-schiefe Verteilung zur Modellierung von Lebensdauern, Ausfallzeiten und Materialermüdung. Sie gehört zu den wichtigsten Verteilungen in der Zuverlässigkeits- und Lebensdaueranalyse und zeichnet sich durch ihre flexible Form aus. Je nach Parameterwahl kann sie exponentielles, zunehmendes oder abnehmendes Ausfallverhalten beschreiben.
Die Verteilung wird durch die Intervallverschiebung *xmin*, den positiven Skalenparameter *T* (scale) sowie den positiven Formparameter β (shape) definiert. Der Parameter *T* steuert die Streuung bzw. charakteristische Lebensdauer, während β das Ausfallverhalten bestimmt. Für $\beta = 1$ reduziert sich die Weibull-Verteilung auf die Exponentialverteilung; für $\beta > 1$ steigt die Ausfallrate mit zunehmendem *x*, während sie bei $\beta < 1$ abnimmt und für $\beta = 1$ konstant bleibt. Für $\beta = 2$ reduziert sich die Weibull-Verteilung auf die Rayleigh-verteilung. Die Weibull-Verteilung findet breite Anwendung in der Zuverlässigkeitstechnik, Materialprüfung, Hydrologie, Windenergieanalyse sowie in technischen und industriellen Lebensdauerstudien. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $x > xmin, T > 0, \beta > 0$

10.3.1 Standardfunktionen der Weibull-Verteilung

Standardfunktionen der Weibull-Verteilung
VT_pdf_weibull(x, alpha, beta, Optional xmin =0#)
VT_cdf_weibull(x, alpha, beta, Optional xmin =0#)
VT_inv_weibull(p, alpha, beta, Optional xmin =0#)
VT_rand_weibull(alpha, beta, Optional xmin =0#)

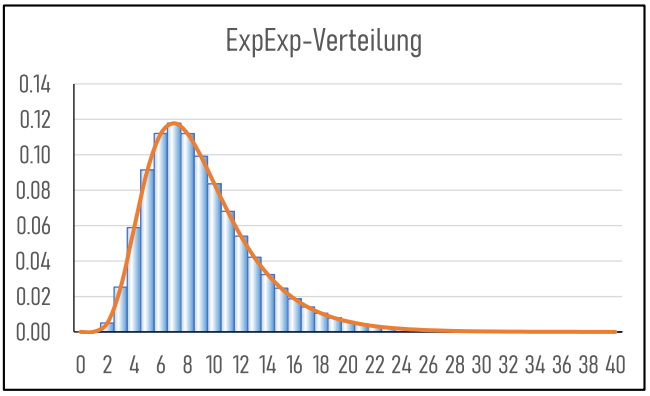
10.3.2 Momente der Weibull-Verteilung

Momente der Weibull-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_Weibull(xmin, alpha, beta, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_Weibull(xmin, alpha, beta 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_Weibull(xmin, alpha, beta 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_Weibull(xmin, alpha, beta 4)

10.3.3 Schätzung der Parameter

Parameter Weibull-Verteilung
VT_Param_Weibull_xmin(z( ))
VT_Param_Weibull_alpha(z( ), xmin)
VT_Param_Weibull_beta(z( ), xmin)
JB-Test zur Prüfung der Anpassung
VT_AD_Test_General(z( ), "VT_cdf_Weibull", "b", xmin, alpha, beta)

10.4 Exponentiated Exponential-Verteilung



Die Exponentiated Exponential-Verteilung ist eine verallgemeinerte Form der Exponentialverteilung mit zusätzlichem Formparameter. Sie entsteht durch Potenzierung der Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung und bietet dadurch eine deutlich größere Flexibilität bei der Modellierung von Lebensdauer- und Wartezeitprozessen. Der Definitionsbereich und die Parameterbedingungen sind: $x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$. Die Verteilung wird durch den positiven Rate-Parameter α sowie den positiven Formparameter β definiert. Der Parameter α bestimmt die Grundintensität bzw. Skalierung, während β die Form der Verteilung beeinflusst und insbesondere das Ausfallverhalten steuert.

- Für β = 1 reduziert sich die Verteilung auf die klassische Exponentialverteilung.
- Für β > 1 ergibt sich eine unimodale, stärker gekrümmte Dichte.
- Für β < 1 entsteht ein ausgeprägt rechtssteiler Verlauf mit hoher Anfangsdichte.

Die Exponentiated Exponential-Verteilung findet Anwendung in der Zuverlässigkeits- und Überlebenszeitanalyse, in Warteschlangenmodellen sowie bei Prozessen mit variabler Ausfallrate, bei denen die klassische Exponentialverteilung nicht ausreichend flexibel ist.

10.4.1 Standardfunktionen der Exponentiated Exponential-Verteilung

Standardfunktionen der ExpExp-Verteilung
VT_pdf_ExpExp(x, alpha, beta)
VT_cdf_ExpExp(x, alpha, beta)
VT_inv_ExpExp(p, alpha, beta)
VT_rand_ExpExp(alpha, beta)

10.4.2 Momente der Exponentiated Exponential-Verteilung

Momente der ExpExp-Verteilung		
Name	empirisch	modellabhängig
Mean	VT_Momente(z( ), 1, 0)	VT_MoM_ExpExp(alpha, beta, 1)
Var	VT_Momente(z( ), 2, 0)	VT_MoM_ExpExp(alpha, beta, 2)
Skewness	VT_Momente(z( ), 3, 0)	VT_MoM_ExpExp(alpha, beta, 3)
Kurtosis	VT_Momente(z( ), 4, 0)	VT_MoM_ExpExp(alpha, beta, 4)

10.4.3 Schätzung der Parameter

Parameter ExpExp-Verteilung
VT_Param_ExpExp(z( ), "alpha")
VT_Param_ExpExp(z( ), "beta")
JB-Test zur Prüfung der Anpassung
VT_AD_Test_General(z( ), "VT_cdf_ExpExp", "b", alpha, beta)

11 Statistische Tests

11.1 Anpassungstests für Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zur Überprüfung der Normalverteilungsannahme wurden mehrere komplementäre Anpassungstests durchgeführt. Die Berechnung erfolgt ausschließlich mit den implementierten Routinen. Angegeben sind jeweils die Prüfgröße sowie der zugehörige p-Wert.

11.1.1 Anderson-Darling-Test

Der Anderson-Darling-Test gewichtet insbesondere die Randbereiche der Verteilung stärker. Dieser Test wird zur Optimierung und Bewertung der Anpassungsgüte aller Verteilungsmodelle verwendet. Die p-Werte sind abhängig von den jeweiligen Verteilungen und speziellen Anpassungen des AD-Wertes zu einem AD*. Bei einem n > 100 erübrigen sich diese Korrekturen.

Berechnet den p-Wert für	
VT_AD_GEV_P(AD)	Generalized Extrem Value-, Gumbel- Frechet- und Gumbel2-Verteilung
VT_AD_GLO_P(AD)	Generalized Logistic Verteilung
VT_AD_GPA_P(AD)	Generalized Pareto Verteilung
VT_AD_Weibull_P(AD)	Generalized Frechet-, Frechet3-, Pareto-, Triangular-, Kumaraswamy-, EE- und Weibull-Verteilung
VT_AD_Uniform_P(AD)	Uniform-Verteilung
VT_AD_Normal_P(AD)	Alle auf der NV-basierten Verteilungen plus Cauchy-, Laplace-, Gamma-, Beta-, Logistic-, und GenLoglogistic-Verteilung
Genereller Anderson-Darling-Test	
VT_AD_Test_General(z( ), "CdfName", "Typ", Param1, Param2, Param3, Param4)	

11.1.2 Anpassungstests für die Normalverteilung

Der Jacque-Bera-Test basiert auf Schiefe und Exzess der Stichprobe. Ebenso der Doornik-Hansen-Test welcher eine modifizierte und robustere Variante des Jacque-Bera-Ansatzes ist. Sie reagieren besonders auf systematische Abweichungen in den Momenten 3. und 4. Ordnung. Der Ryan-Joiner-Test ist ein Korrelationsansatz ähnlich dem Shapiro-Wilk-Test und besitzt eine hohe Teststärke bei kleinen und mittleren Stichproben. Der Epps-Pulley-Test basiert auf der charakteristischen Funktion der Normalverteilung und stellt damit einen eher globalen Anpassungstest dar.

Testergebnis	p-Wert
VT_JB_Test(Schiefe, Exzess, n)	comp_cdf_chi_sq(JB, 2)
VT_DH_Test(n, Schiefe, Kurtosis)	comp_cdf_chi_sq(DH, 2)
VT_RJ_Test(z( ))	VT_RJ_pWert(RJ, n)
VT_EP_Test(z( ))	VT_EP_pWert(EP)

In der Praxis ist es sinnvoll, die Normalverteilungsannahme nicht nur mit einem einzelnen Test, sondern mit mehreren komplementären Verfahren zu überprüfen. Unterschiedliche Tests besitzen unterschiedliche Sensitivitäten gegenüber bestimmten Abweichungsformen. Da reale Abweichungen von der Normalverteilung unterschiedliche Formen annehmen können (Schiefe, schwere Tails, Ausreißer, Mischverteilungen), erhöht die parallele Anwendung mehrerer Tests die diagnostische Sicherheit.

11.1.3 Anpassungstests für die Exponential- und Rayleigh-Verteilung

Da bei der Exponential- und der Rayleigh-Verteilung nur der Scale-Parameter berechnet werden kann und der shape-Parameter mit 1 bzw. 2 vorgegeben ist, kann der bevorzugte Anderson-Darling-Test nicht angewendet werden, statt dessen werden modifizierte Jacque-Bera-Tests genutzt. Diese zeigen für die betroffenen Verteilungen ausgezeichnete Eigenschaften.

Testergebnis	p-Wert
VT_JB_Test_Exp(z())	comp_cdf_chi_sq(JB, 2)
VT_JB_Test_Rayleigh(z())	comp_cdf_chi_sq(JB, 2)

11.1.4 Anpassungstest für diskrete Verteilungen

Testergebnis	VT_G_Test_Woolf(O(), E())
Freiheitsgrad	VT_G_Test_Woolf_df(O(), E())
p-Wert	VT_G_Test_Woolf_p(O(), E())

11.2 Ausreißertests für Normalverteilungen

Zur Identifikation potenzieller Ausreißer wird eine standardisierte maximale Abweichung eines Messwertes vom Mittelwert berechnet und mit einem Grenzwert verglichen. Werte, die größer als der Grenzwert sind, können Ausreißer sein.

Ausreißertest		
VT_Ausreisser_Test(z())	<	VT_Grubbs_pWert(sig, n)
VT_Ausreisser_Test(z())	<	VT_MNS_pWert(sig, n)
VT_Ausreisser_Test(z())	<	VT_Ausreisser_Grenze_Beta(n, Optional alpha = 0.05)
VT_Ausreisser_Test(z())		VT_Ausreisser_pBeta(z())

Der letzte Ausreißer-Test ist ein generischer, verteilungsbasierter Ordnungsstatistik-Test für potentielle Ausreißer auf Basis der Beta-Verteilung der transformierten Ränge. Da dieser Test verteilungsfrei ist, lässt er sich für alle Verteilungen anwenden, ohne den geringsten Verlust an Informationen. Statistisch ist er besser begründet als Grubbs- und MNS-Test, außerdem lassen sich für potentielle Ausreißer p-Werte berechnen.

11.3 Unabhängigkeitstest

Für die folgenden Tests ist es entscheidend, dass die ursprüngliche zeitliche bzw. zufällige Reihenfolge der Beobachtungen erhalten bleibt. Nur so beziehen sich Autokorrelationen und Sequenztests auf die tatsächliche Messreihenfolge und nicht auf eine künstlich erzeugte Struktur.

Autokorrelation	
VT_Autokorrelation(z(), Lag)	
VT_Ljung_Box_Test(ak, Lag, n)	comp_cdf_chi_sq(LB(), k)
Sukzessive Differenz	
VT_SukDiff_Test(z())	VT_SukDiff_pWert(n, SD)
Verteilungsfreie Tests auf Unabhängigkeit	
VT_IterationTest(z())	
Mischung:	comp_cdf_normal (IT)
Cluster:	cdf_normal (IT)
VT_PhasenTest(z())	
Trend:	comp_cdf_normal (PH)
Oszillation:	cdf_normal (PH)

Alle angewendeten Verfahren – Autokorrelation, Ljung-Box-Test, Sukzessive-Differenzen-Test, Iterationstest und Phasenhäufigkeitstest – liefern konsistente Ergebnisse: Es gibt keine statistisch signifikanten Hinweise auf Autokorrelation, Trend, Clusterbildung oder Oszillation. Sollte keiner der Test signifikante Ergebnisse zeigen, dann können die Daten als zufällig und unabhängig angesehen werden. Damit sind die zentralen Voraussetzungen für viele inferenzstatistische Verfahren (z. B. Konfidenzintervalle, Prozessfähigkeitsanalyse oder Regressionsmodelle) erfüllt. Neben der Normalverteilungsannahme ist die Unabhängigkeit der Beobachtungen eine zentrale Voraussetzung vieler statistischer Verfahren in der Qualitäts- und Prozessanalyse.

11.4 Fehleranteile und Konfidenzintervalle

Auf Basis eines geschätzten Mittelwertes μ und einer Standardabweichung σ wird der theoretische Ausschussanteil außerhalb der Spezifikationsgrenzen berechnet. Aufgrund der Rechengenauigkeit sind Fehleranteile < 10^{-15} als Null anzusehen. Konfidenzintervalle können für ein p = 0 nicht berechnet werden. Das Konfidenzintervall wird für ein beliebiges Signifikanzniveau (sig) berechnet. Die Berechnung erfolgt nicht approximativ, sondern exakt unter Verwendung:

- der nicht-zentralen t-Verteilung
- der exakten Beta-Verteilung
- sowie der exakten Inversionsfunktionen [inv_normal(), inv_t_nc(), cdf_beta()]

Der zugrunde liegende Zusammenhang basiert auf der Transformation des nichtzentralen t-Parameters in eine Beta-Verteilung. Damit wird die Unsicherheit der geschätzten Prozessparameter vollständig berücksichtigt.

unterer Fehleranteil	Fehleranteil	oberer Fehleranteil
VT_Anteilwert_UGW(mu, sigma, UGW)	$p = p_{un} + p_{ob}$	VT_Anteilwert_OGW(mu, sigma, OGW)
unteres Konfidenzintervall	Fehleranteil	oberes Konfidenzintervall
VT_Schwankung_p(p, n, sig, "un")	$p = p_{un} + p_{ob}$	VT_Schwankung_p(p, n, sig, "ob")

11.5 Berechnung von Prozessfähigkeitsindizes

In einem großen Teil der Fachliteratur wird zur Berechnung der Prozessfähigkeitsindizes Cp und Cpk die sogenannte inhärente Streuung (z. B. berechnet über Moving Range σ_{MR} oder über Teilstichproben σ_{inn}) verwendet. Diese Vorgehensweise setzt jedoch zwingend voraus, dass der Prozess:

- statistisch stabil ist,
- normalverteilte Messwerte liefert,
- unabhängige Beobachtungen aufweist.

Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, sind Cp- und Cpk-Werte falsch. Sind die Voraussetzungen aber alle erfüllt, dann ist die Gesamtstreuung σ der inhärenten Streuung vorzuziehen, da sie die vollständige Streuung des Prozesses widerspiegelt und keine künstliche Glättung durch Subgruppenbildung erfolgt.
Die potentielle Prozessfähigkeit Cp was möglich ist, wenn die Mitte des Toleranzbereich gleich dem Mittelwert μ ist. Die einseitigen Prozessfähigkeiten Cpl und Cpu bilden den Grundstock für die Cpk-Berechnung: Der etwas kleinere Wert das Minimum von Cpl und Cpu ergibt den Cpk mit dem Konfidenzintervall. Ein geringer Unterschied zwischen Cp und Cpk bestätigt die gute Zentrierung des Prozesses. In der Industrie werden immer höhere Cpk gefordert, dass ist im Kern ein Missverständnis:

Cpk wird als *„harte Qualitätsaussage“* interpretiert,
obwohl er nur eine modellbasierte Schätzung ist.

Wo die typischen Fehlinterpretationen liegen Cpk = 1.67 der Prozess ist sicher, tatsächlich nur unter Annahmen wie Normalverteilung, Unabhängigkeit und Stabilität. Kleine Stichprobe mit großem Cpk bedeutet in der Realität: kaum Information über die Tails und somit eine extreme Extrapolation. Cp / Cpk oder Pp / Ppk als universelle Maße sind unbrauchbar, weil sie bei Schiefe, Mischverteilungen, Ausreißern oder Drift schlicht ungeeignet sind. Der eigentliche Widerspruch ist, dass die Industrie ein ppm-Niveau (Extrembereich) fordert, aber mit n = 5 … 100 (Zentralbereich) arbeitet. Das ist statistisch ein Skalenbruch. Um Falschinterpretationen zu vermeiden sollten immer Konfidenzintervalle und große Stichproben n ≃ 800 oder größer berücksichtigt werden.

11.5.1 Berechnung notwendiger Parameter

Parameter für Cp / Cpk		
unteres Konfidenzintervall	Parameter	oberes Konfidenzintervall
VT_Xquer_VB(sig, mu, sigma, n, "un")	VT_Xquer(z())	VT_Xquer_VB(sig, mu, sigma, n, "ob")
VT_Var_VB(sig, n, var, "un")	VT_Variance(z())	VT_Var_VB(sig, n, var, "ob")
(VT_Var_VB(sig, n, var, "un"))^0.5	(VT_Variance(z()))^0.5	(VT_Var_VB(sig, n, var, "ob"))^0.5
	VT_MR(z())	

11.5.2 Berechnung von Cp / Cpk

Ergebnisse für Cp / Cpk		
unteres Konfidenzintervall	Parameter	oberes Konfidenzintervall
CPunten(CP, n, sig)	CP(UGW, OGW, sigma)	CPoben(CP, n, sig)
CPLunten(CPL, n, sig)	CPL(UGW, mu, sigma)	CPLoben(CPL, n, sig)
CPUunten(CPU, n, sig)	CPU(OGW, mu, sigma)	CPUoben(CPU, n, sig)
VT_CPKunten(Cpk, n, sig)	Min(CPL, CPU)	VT_CPKoben(Cpk, n, sig)

11.5.3 Berechnung von Pp / Ppk

Für nicht-normalverteilte oder instabile Prozesse gelten andere Berechnungsregeln. In solchen Fällen werden Pp und Ppk (Prozessleistungsindizes) verwendet. Diese beschreiben die beobachtete Gesamtleistung, ohne die Annahme statistischer Stabilität zu treffen.

Ergebnisse für Pp / Ppk nicht-normalverteilter Werte		
unteres Konfidenzintervall	Parameter	oberes Konfidenzintervall
CPunten(PP, n, sig)	VT_Pp_Q(Q0135, Q9985, UGW, OGW)	CPoben(PP, n, sig)
VT_CPKunten(Ppk, n, sig)	VT_Ppk_Q(Q0135, Q5000, Q9985, UGW, OGW)	VT_CPKoben(Ppk, n, sig)

11.6 Statistische Toleranzintervalle

Sind Lage (Mittelwert μ) und Streuung (Standardabweichung σ) einer Stichprobe bestimmt, können sogenannte statistische Toleranzgrenzen berechnet werden. Hierzu müssen zwei Größen vorgegeben werden:

- der maximal zulässige Fehleranteil p (Abdeckungswahrscheinlichkeit),
- das gewünschte Signifikanzniveau sig (Vertrauenswahrscheinlichkeit 1−sig).

Auf dieser Basis wird ein Toleranzfaktor k bestimmt, so dass sich die statistische Toleranz ergibt als einseitig: $\mu \pm k_1 \cdot \sigma$ und zweiseitig: $xq \pm k_2 \cdot s$. Der Faktor k hängt vom Stichprobenumfang n, vom Abdeckungsgrad 1−p sowie vom Signifikanzniveau sig ab. Für (n = 99, sig = 0.05) und einen sehr hohen Abdeckungsgrad von 1−p = 0.9999 ergeben sich:

- einseitiger Toleranzfaktor $k_1 = 4.2496$
- zweiseitiger Toleranzfaktor $k_2 = 4.4354$

Wird alternativ als Abdeckungswahrscheinlichkeit Φ(4) (also die kumulative Normalverteilung bei z = 4 entsprechend Cpk = 1.33) verwendet, ergibt sich:

- einseitiger Toleranzfaktor $k_1 = 4.5662$
- zweiseitiger Toleranzfaktor $k_2 = 4.7438$

Faktoren für statistische Toleranzen
VT_Toleranzfaktor_k2(n, p, sig)
VT_Toleranzfaktor_k1(n, p, sig)

Statistische Toleranzgrenzen geben mit einer vorgegebenen Vertrauenswahrscheinlichkeit an, dass mindestens ein bestimmter Anteil der Grundgesamtheit innerhalb dieser Grenzen liegt. Dabei ist wichtig: Die statistische Toleranz beschreibt eine probabilistische Aussage über die Grundgesamtheit und darf nicht mit den technischen Spezifikationsgrenzen verwechselt werden. Die statistische Toleranz muss innerhalb der technischen Anforderungen liegen. Ist sie größer als die technischenGrenzwerte, ist der Prozess nicht ausreichend leistungsfähig. Ein Toleranzintervall beschreibt einen Bereich, der mit vorgegebener Sicherheit einen bestimmten Anteil der Grundgesamtheit enthält, z. B. (zweiseitig): $\mu \pm k \cdot \sigma$. Es beantwortet die Frage: Welcher Bereich enthält mindestens (1−p) der Grundgesamtheit mit Vertrauensniveau (1−sig)? Dabei ist wichtig:

- Bezieht sich auf Einzelwerte der Grundgesamtheit.
- Berücksichtigt sowohl Lage als auch Streuung.
- Der Faktor k hängt von n, p und sig ab.
- Wird bei kleinen n deutlich größer.

11.7 Wichtige Ordnungs-Statistiken

Diese Funktionen werden vielfältig zur Berechnung und Darstellung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen benötigt

berechnet Quantile geordneter Werte
VT_Quantiles(z( ), p)
berechnet MedianRanks geordneter Werte
VT_MedianRank(index, n)
berechnet MedianRanks für beliebiges p
VT_MedianRankp(index, n, p)

11.8 Regression und Korrelation

11.8.1 Einfache lineare Regression und Korrelation

berechnet Korrelationskoeffizienten
VT_KorKoeff(x( ), y( ))
VT_RegKorr(x( ), y( ), 1)
Konstante = 0
VT_RegKorr(x( ), y( ), 0)
berechnet Regressionskoeffizienten
VT_RegKoeff(x( ), y( ), 1)
VT_RegKonst(x( ), y( ))
Konstante = 0
VT_RegKoeff(x( ), y( ), 0)

11.8.2 Orthogonale Regression

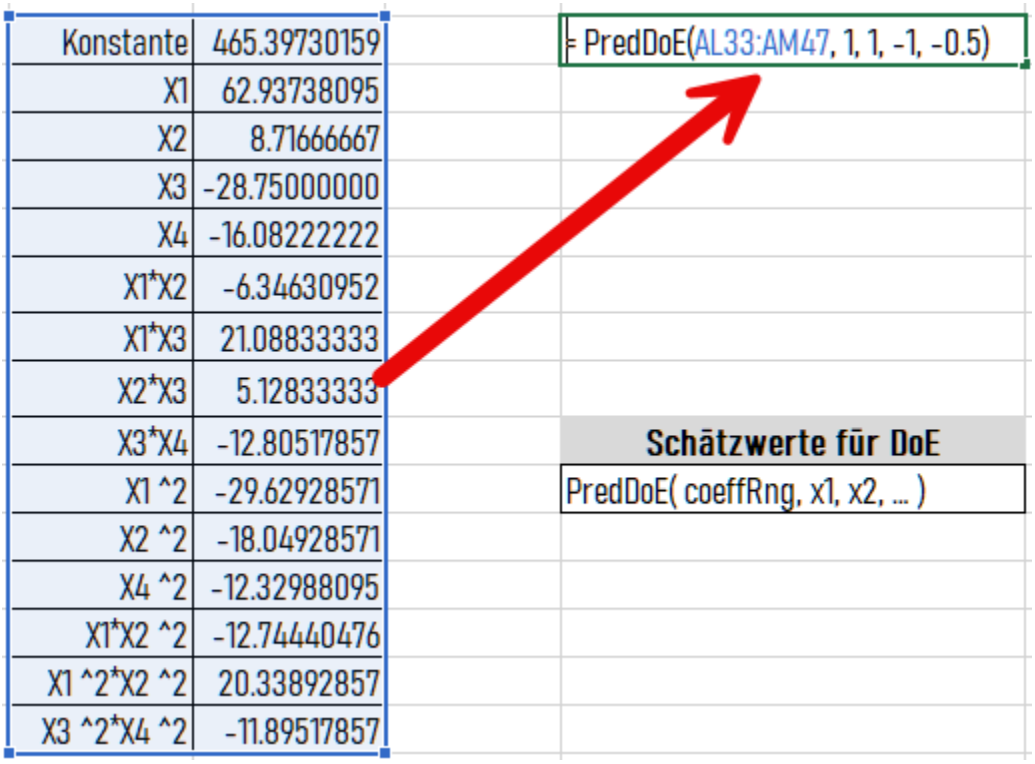
berechnet orthogonale Regressionsparameter
VT_regress_orthols(x(), y(), "b0")
VT_regress_orthols(x(), y(), "sb0")
VT_regress_orthols(x(), y(), "b1")
VT_regress_orthols(x(), y(), "sb1")
VT_regress_orthols(x(), y(), "se")
VT_regress_orthols(x(), y(), "R")

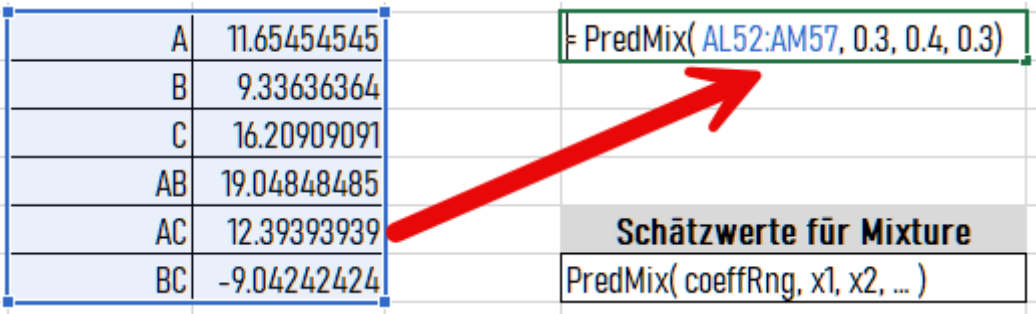
11.8.3 Residuenanalyse kritischer Cooks_D

Beurteilung von Residuen (Cooks_D)
Cooks_Dkrit(sig, n, k)

11.8.4 Schätzwerte für DoE

Konstante	465.39730159
X1	62.93738095
X2	8.71666667
X3	-28.75000000
X4	-16.08222222
X1*X2	-6.34630952
X1*X3	21.08833333
X2*X3	5.12833333
X3*X4	-12.80517857
X1 ^2	-29.62928571
X2 ^2	-18.04928571
X4 ^2	-12.32988095
X1*X2 ^2	-12.74440476
X1 ^2*X2 ^2	20.33892857
X3 ^2*X4 ^2	-11.89517857



11.8.5 Schätzwerte für Mischungen

A	11.65454545
B	9.33636364
C	16.20909091
AB	19.04848485
AC	12.39393939
BC	-9.04242424