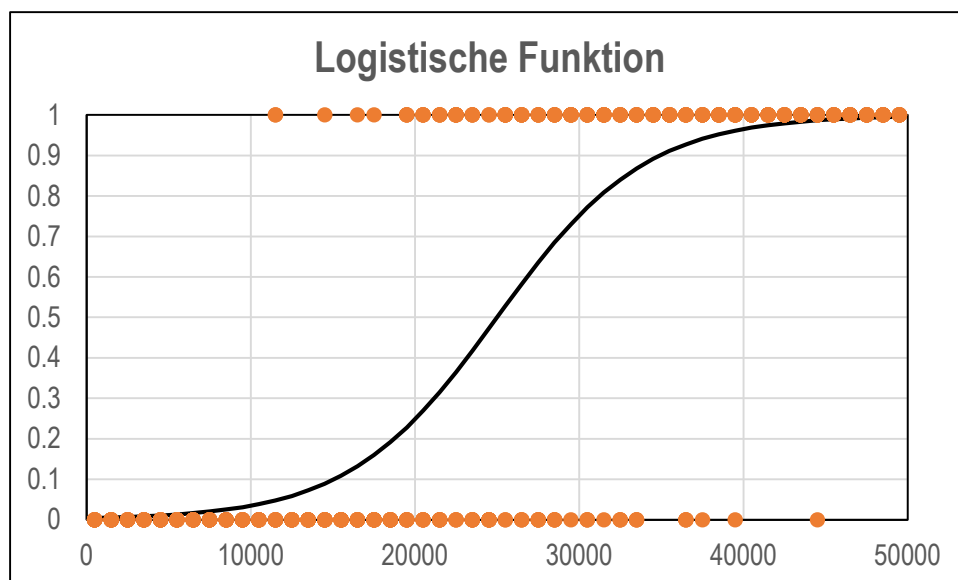


Logistische-Regression

Methodik, Modellvalidierung und Interpretation



Eckehardt Spenhoff

Alle Rechte, auch die Übersetzung in fremden Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Werkes darf ohne vorherige schriftliche Genehmigung des Verfassers in irgendeiner Form, auch nicht zum Zweck der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Medien verarbeitet und vervielfältigt werden.

Copyright © 2026 Eckehardt Spenhoff

Inhaltsverzeichnis

1	Logistische Regression.....	6
1.1	Messgrößen und Banknotenabbildung.....	6
1.2	Gegenstand und Fragestellung.....	6
1.3	Messgrößen und Datengrundlage.....	7
2	Die Modellgleichung.....	7
2.1	Odds und Odds Ratios.....	7
3	Maximum-Likelihood-Schätzung.....	8
3.1	Numerische Standardisierung.....	8
3.2	Koeffizienten und Wald-Tests.....	9
3.3	Modellvergleich mit dem Nullmodell.....	9
3.4	McFadden- R^2 und Informationskriterien.....	10
4	Klassifikation mit festem Cutoff.....	10
4.1	ROC-Kurve und AUC.....	11
4.2	Youden-Index und optimaler Schwellenwert.....	11
5	Pearson-Residuen.....	12
5.1	Deviance-Residuen.....	12
5.2	Leverage.....	12
5.3	Delta-D und Cook-Distanz.....	12
6	Multikollinearität und VIF.....	13
7	Anpassungsgüte bei Wiederholungen.....	13
8	Vollständige Separation mit X6.....	13
9	Vergleich der beiden Banknotenmodelle.....	14
9.1	Fachliche Interpretation der Banknotenbefunde.....	14
9.2	Hinweise zur Ergebnisdarstellung in OQM-Stat.....	14
10	Zusammenfassung.....	15
11	Literatur und methodische Einordnung.....	15

1 Logistische Regression

Das erklärende Beispiel sind 205 Schweizer Banknoten (100 echt, 105 gefälscht). Für die reguläre logistische Regression werden X1 bis X5 verwendet und für vollständige Separation mit der Einbeziehung von X6. Die Berechnungsangaben orientieren sich an der bereitgestellten Implementierung von OQM-Stat. Die hier ergänzend aus den Rohdaten berechneten Zahlen sind als unabhängige Kontrollrechnung gekennzeichnet.

1.1 Messgrößen und Banknotenabbildung

Variable	Bedeutung
Y	0 = echt; 1 = gefälscht
X1	Länge der Banknote
X2	Breite links
X3	Breite rechts
X4	Unterer Randabstand
X5	Oberer Randabstand
X6	Länge der Bilddiagonalen

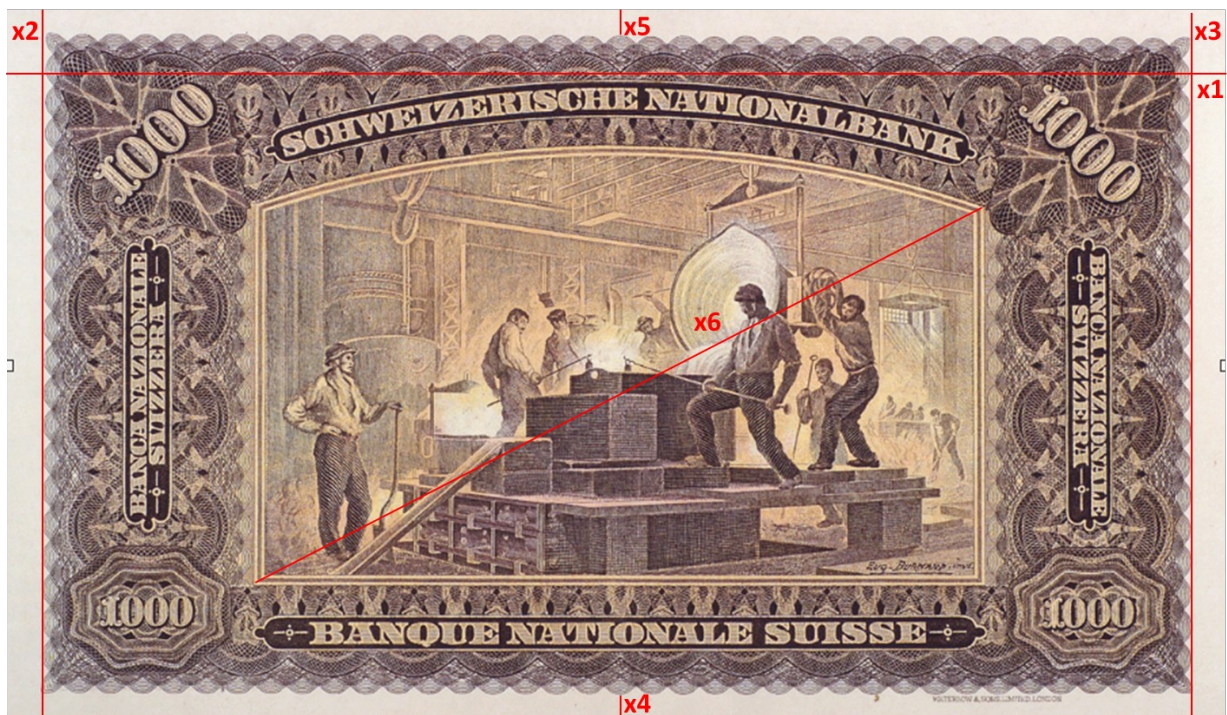


Abbildung 1: Messpositionen der geometrischen Merkmale an der Schweizer Banknote.

1.2 Gegenstand und Fragestellung

Die binäre logistische Regression untersucht den Zusammenhang zwischen einer dichotomen Zielgröße und metrischen oder geeignet kodierten erklärenden Variablen. Im Banknotenbeispiel steht $Y = 0$ für echte und $Y = 1$ für gefälschte Banknoten. Das Verfahren schätzt die bedingte Wahrschein-

lichkeit einer Fälschung aus geometrischen Messwerten. Die Analyse verbindet damit ein statistisches Wahrscheinlichkeitsmodell mit einer praktischen Klassifikationsregel.

Der Datensatz umfasst 205 Banknoten, davon 100 echte und 105 gefälschte. Die sechs ursprünglich erhobenen Merkmale betreffen Länge, linke und rechte Breite, unteren und oberen Rand sowie die Bilddiagonale. Das reguläre OQM-Stat-Modell verwendet X1 bis X5; bei Einbeziehung von X6 liegt vollständige Separation vor. Diese Unterscheidung ist der rote Faden des Anwendungsbeispiels.

1.3 Messgrößen und Datengrundlage

Die Länge X1, die linke Breite X2 und die rechte Breite X3 erfassen die äußere Geometrie. X4 beschreibt den unteren Randabstand und X5 den oberen Randabstand. X6 ist die Länge der Bilddiagonalen. Die Merkmale sind kontinuierlich; die Zielgröße ist als 0/1-Indikator kodiert. Alle Aussagen über den Zusammenhang beziehen sich auf diese Kodierung: Positive Regressionskoeffizienten erhöhen die modellierten Odds für $Y = 1$.

Eine Messgröße kann trotz kleiner absoluter Zahlen einen großen Effekt pro Maßeinheit besitzen. Die numerische Größe eines Koeffizienten ist deshalb nur gemeinsam mit seiner Maßeinheit sinnvoll interpretierbar. Gerade bei den relativ eng gestreuten Banknotenmaßen kann bereits eine Änderung um einen Bruchteil einer Einheit relevant sein.

2 Die Modellgleichung

Das logistische Modell bildet eine lineare Kombination der Messgrößen auf den Bereich zwischen null und eins ab. Der lineare Prädiktor eta ist zunächst unbeschränkt. Die logistische Funktion transformiert eta in eine Wahrscheinlichkeit. Bei eta = 0 beträgt die Wahrscheinlichkeit genau 0,5; positive eta-Werte sprechen für Klasse 1, negative für Klasse 0.

Die Logit-Darstellung zeigt die eigentliche Linearitätsannahme: Nicht die Wahrscheinlichkeit, sondern der Logarithmus der Odds ist eine lineare Funktion der erklärenden Variablen. Die resultierende Wahrscheinlichkeitskurve ist S-förmig und nähert sich asymptotisch den Grenzen null und eins.

Lineare Vorhersage:

$$\eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j \cdot x_{ij}$$

Logistische Funktion:

$$\pi_i = \frac{1}{1 + \exp(-\eta_i)}$$

Logit:

$$\log\left(\frac{\pi_i}{1 - \pi_i}\right) = \eta_i$$

2.1 Odds und Odds Ratios

Odds sind das Verhältnis der Eintrittswahrscheinlichkeit zur Gegenwahrscheinlichkeit. Eine Wahrscheinlichkeit von 0,8 entspricht Odds von 4:1; eine Wahrscheinlichkeit von 0,2 entspricht Odds von 1:4. Der Exponentialwert eines Regressionskoeffizienten ist die Odds Ratio für eine Erhöhung des betreffenden Prädiktors um eine Einheit bei konstanten übrigen Variablen.

Die Odds Ratio ist ausdrücklich kein relatives Risiko. Besonders bei hohen Ausgangswahrscheinlichkeiten kann sich eine große Odds Ratio nur in einer vergleichsweise kleinen absoluten Wahr-

scheinlichkeitsänderung niederschlagen. Deshalb ist neben der OR-Tabelle die Betrachtung konkreter vorhergesagter Wahrscheinlichkeiten hilfreich.

Odds:

$$\text{Odds}(Y = 1 | x) = \frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}$$

Odds Ratio:

$$\text{OR}_j = \exp(\beta_j)$$

3 Maximum-Likelihood-Schätzung

Die unbekannten Modellparameter werden durch Maximierung der Bernoulli-Likelihood geschätzt. Jede Beobachtung trägt mit der vorhergesagten Wahrscheinlichkeit ihrer tatsächlich beobachteten Klasse zur Likelihood bei. Der Logarithmus macht aus dem Produkt eine Summe und verbessert die numerische Handhabung.

OQM-Stat verwendet ein iteratives Fisher-Scoring-/Newton-Verfahren. Score und Fisher-Informationsmatrix bestimmen die Aktualisierung der Koeffizienten. Eine reguläre Lösung liegt vor, wenn die Iteration konvergiert und die benötigte Informationsmatrix invertierbar ist. Das Verfahren ist grundlegend anders als die Kleinste-Quadrate-Schätzung der linearen Regression.

Bernoulli-Likelihood:

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^n \pi_i^{y_i} (1 - \pi_i)^{1-y_i}$$

Log-Likelihood:

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n [y_i \log(\pi_i) + (1 - y_i) \log(1 - \pi_i)]$$

Score:

$$U(\boldsymbol{\beta}) = X^T (y - \pi)$$

Fisher-Information:

$$I(\boldsymbol{\beta}) = X^T W X, \quad W = \text{diag}(\pi_i(1 - \pi_i))$$

Fisher-Scoring:

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} + I(\boldsymbol{\beta}^{(t)})^{-1} U(\boldsymbol{\beta}^{(t)})$$

3.1 Numerische Standardisierung

Die Implementierung standardisiert die erklärenden Variablen intern, lässt die Konstante unverändert und startet die Iteration bei Nullkoeffizienten. Die Standardisierung verhindert, dass stark unterschiedliche Größenordnungen der Messwerte die numerische Optimierung unnötig erschweren. Nach der Schätzung werden die Koeffizienten und ihre Kovarianzmatrix auf die ursprüngliche Messskala zurücktransformiert.

Die veröffentlichte OQM-Stat-Ausgabe zeigt daher interpretierbare Koeffizienten in den Einheiten der Banknotenmessung. Eine interne Standardisierung verändert nicht die durch das Modell vorhergesagten Wahrscheinlichkeiten, sofern die Rücktransformation konsistent erfolgt.

Standardisierung:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}$$

3.2 Koeffizienten und Wald-Tests

Jeder geschätzte Koeffizient besitzt einen Standardfehler, der aus der inversen Informationsmatrix abgeleitet wird. Die Wald-Statistik setzt Koeffizient und Standardfehler ins Verhältnis. OQM-Stat gibt daraus p-Werte und Konfidenzintervalle der Odds Ratios aus. Die einzelnen Tests beschreiben bedingte Effekte: Der Beitrag einer Variablen wird unter Berücksichtigung der übrigen Modellvariablen bewertet.

Im Banknotenbeispiel besitzen X4 und X5 besonders deutlich positive Koeffizienten. Bei X1 bis X3 sind die individuellen Wald-Ergebnisse wesentlich weniger ausgeprägt. Daraus folgt nicht, dass diese Merkmale ohne jede Information wären; die geometrischen Messungen können sich teilweise gegenseitig erklären. Die Modellprüfung und die Einzeltests beantworten verschiedene Fragen.

Wald-Statistik:

$$z_j = \frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)}$$

OR-Konfidenzintervall:

$$KI_{95\%}(OR_j) = \exp(\hat{\beta}_j \pm 1.96 SE(\hat{\beta}_j))$$

Prädiktor	Koeffizient β	Odds Ratio $\exp(\beta)$	p (Wald)
X1	0.3372	1.4010	0.814
X2	-1.4717	0.2295	0.7261
X3	3.6576	38.7684	0.2728
X4	5.4142	224.5820	0.004881
X5	7.2609	1423.5036	0.001037

Tabelle: Unabhängige Kontrollrechnung mit den bereitgestellten 205 Datensätzen; Rundungsabweichungen gegenüber OQM-Stat sind möglich.

3.3 Modellvergleich mit dem Nullmodell

Das Nullmodell enthält ausschließlich die Konstante und prognostiziert für alle Banknoten dieselbe Fälschungswahrscheinlichkeit, nämlich den beobachteten Anteil von Klasse 1. Der Likelihood-Ratio-Test vergleicht seine Log-Likelihood mit der des Modells einschließlich X1 bis X5. Die Differenz wird in eine Chi-Quadrat-Teststatistik mit fünf Freiheitsgraden umgesetzt.

Ein sehr großer LR-Wert bedeutet, dass die Messgrößen gemeinsam wesentlich mehr Information zur Klassenzugehörigkeit liefern als das Nullmodell. Ein in Excel als 0,000000 angezeigter p-Wert ist dabei ein gerundeter sehr kleiner Wert und keine mathematisch exakte Null.

Likelihood-Ratio-Test:

$$G^2 = 2 \left[\ell(\hat{\beta}) - \ell(\hat{\beta}_{0,\text{null}}) \right]$$

3.4 McFadden-R² und Informationskriterien

McFaddens Pseudo-R² vergleicht die maximierte Log-Likelihood mit der des Nullmodells. Es ist nicht mit dem Varianzaufklärungsanteil R² der linearen Regression gleichzusetzen. AIC und BIC kombinieren Modellanpassung mit einer Strafe für die Zahl geschätzter Parameter. Kleinere Werte bevorzugen bei gleicher Datengrundlage das jeweilige Modell.

Bei der logistischen Regression mit fünf Prädiktoren beträgt die Parameterzahl einschließlich Konstante sechs. Das AIC bestraft jeden Parameter mit zwei Einheiten, während das BIC die Stichprobengröße berücksichtigt. Die Kriterien eignen sich besonders für den Vergleich mehrerer regulär geschätzter Kandidatenmodelle.

McFadden-R²:

$$R_{\text{McF}}^2 = 1 - \frac{\ell(\hat{\beta})}{\ell(\hat{\beta}_{0,\text{null}})}$$

AIC:

$$\text{AIC} = -2\ell(\hat{\beta}) + 2p$$

BIC:

$$\text{BIC} = -2\ell(\hat{\beta}) + p \log n$$

Kennzahl	Kontrollrechnung
n	205
Log-Likelihood	-9.049582
Null-Log-Likelihood	-142.034190
McFadden R ²	0.936286
AIC	30.099164
BIC	50.037223
LR-Chi ²	265.969217

4 Klassifikation mit festem Cutoff

Für die praktische Entscheidung wird die geschätzte Wahrscheinlichkeit mit einem Schwellenwert verglichen. OQM-Stat verwendet in der Hauptklassifikation den Cutoff 0,5: Wahrscheinlichkeiten ab 0,5 werden als Fälschung klassifiziert. Aus den vorhergesagten und tatsächlichen Klassen entsteht die Konfusionsmatrix mit richtig positiven, richtig negativen, falsch positiven und falsch negativen Entscheidungen. Die Klassifikationsgenauigkeit ist leicht verständlich, kann aber bei ungleichen Klassenanteilen irreführen. Sensitivität betrachtet den Anteil erkannter Fälschungen, Spezifität den Anteil korrekt erkannter echter Banknoten. Welche Fehlklassifikation schwerer wiegt, hängt vom praktischen Einsatzzweck ab.

Sensitivität:

$$\text{Sens} = \frac{TP}{TP + FN}$$

Spezifität:

$$\text{Spez} = \frac{TN}{TN + FP}$$

Tatsächlich	Vorhergesagt	
	0 = echt	1 = gefälscht
0 = echt	98	2
1 = gefälscht	1	104

4.1 ROC-Kurve und AUC

Die ROC-Kurve betrachtet nicht nur einen einzigen Cutoff. Sie trägt die Sensitivität gegen die Falsch-Positiv-Rate 1 minus Spezifität auf, während die Entscheidungsschwelle variiert. Eine Kurve nahe der linken oberen Ecke zeigt eine gute Trennung der Klassen. Die Fläche unter der Kurve, AUC, fasst diese Rangordnungsleistung zusammen.

Die AUC lässt sich als Wahrscheinlichkeit interpretieren, dass eine zufällig gewählte Fälschung einen höheren Modellscore erhält als eine zufällig gewählte echte Banknote, wobei Bindungen anteilig berücksichtigt werden. OQM-Stat berechnet die Fläche numerisch mit der Trapezregel und behandelt gleiche Scores bei der ROC-Konstruktion gemeinsam.

ROC-Kennwert	Kontrollrechnung
AUC	0.998857
Maximaler Youden-Index	0.980000
Youden-Cutoff	0.200760
Sensitivität am Youden-Cutoff	1.000000
Spezifität am Youden-Cutoff	0.980000

4.2 Youden-Index und optimaler Schwellenwert

Der Youden-Index ist die Summe von Sensitivität und Spezifität minus eins. OQM-Stat bestimmt denjenigen beobachteten ROC-Schwellenwert, für den dieser Index maximal wird. Das ist ein datenbezogenes Kriterium für einen ausgewogenen Kompromiss zwischen den beiden Klasseneigenschaften. Der Youden-Cutoff muss nicht mit 0,5 übereinstimmen. Er beantwortet auch eine andere Frage als die Maximum-Likelihood-Schätzung: Die Modellparameter bestimmen Wahrscheinlichkeiten; der Cutoff setzt diese Wahrscheinlichkeiten in Entscheidungen um. Die Schwellenwertwahl sollte im Artikel daher als eigener Auswertungsschritt erscheinen.

Youden-Index:

$$J = \text{Sens} + \text{Spez} - 1$$

5 Pearson-Residuen

Das Pearson-Residuum normiert die Differenz zwischen beobachteter Klasse und vorhergesagter Wahrscheinlichkeit durch die geschätzte Bernoulli-Standardabweichung. Ein großes positives Residuum entsteht, wenn eine Fälschung trotz geringer vorhergesagter Wahrscheinlichkeit beobachtet wird; ein großes negatives Residuum zeigt die umgekehrte Konstellation.

Bei Wahrscheinlichkeiten nahe null oder eins können einzelne unerwartete Klassenzugehörigkeiten große standardisierte Abweichungen verursachen. Die Pearson-Residuen ergänzen die Klassifikationsübersicht um eine fallbezogene Diagnose.

Pearson-Residuum:

$$r_{P,i} = \frac{y_i - \hat{\pi}_i}{\sqrt{\hat{\pi}_i(1 - \hat{\pi}_i)}}$$

5.1 Deviance-Residuen

Deviance-Residuen zerlegen die Anpassungsdeviance in vorzeichenbehaftete Beiträge einzelner Beobachtungen. Ihr Betrag beschreibt, wie stark die jeweilige beobachtete Klasse der modellierten Wahrscheinlichkeit widerspricht. Die Vorzeichenrichtung stimmt mit derjenigen der Rohresiduen überein. Pearson- und Deviance-Residuen beruhen auf unterschiedlichen Gewichtungen derselben Beobachtungsabweichung. Ihre gemeinsame Ausgabe erleichtert die Suche nach Banknoten, die im Verhältnis zu ihrer Modellwahrscheinlichkeit ungewöhnlich erscheinen.

Deviance-Residuum:

$$r_{D,i} = \text{sign}(y_i - \hat{\pi}_i) \sqrt{-2[y_i \log \hat{\pi}_i + (1 - y_i) \log(1 - \hat{\pi}_i)]}$$

5.2 Leverage

Leverage kennzeichnet die Stellung einer Beobachtung im gewichteten Raum der erklärenden Variablen. Bei der logistischen Regression hängt der Gewichtungsfaktor von der geschätzten Wahrscheinlichkeit ab: $w = \pi(1-\pi)$. Er ist nahe 0,5 am größten und nahe den Wahrscheinlichkeitsgrenzen klein. Eine Beobachtung mit hoher Leverage besitzt eine auffällige Kombination von Prädiktorwerten. Hohe Leverage allein ist noch kein Beleg für einen problematischen Einfluss; entscheidend ist das Zusammenwirken von Hebelwirkung und Modellabweichung.

Leverage:

$$h_{ii} = w_i x_i^T (X^T W X)^{-1} x_i$$

5.3 Delta-D und Cook-Distanz

OQM-Stat berechnet eine approximative Delta-D-Kennzahl aus dem quadrierten Deviance-Residuum sowie einem leveragegewichteten Pearson-Anteil. Die Cook-Distanz berücksichtigt das quadrierte Pearson-Residuum, Leverage und die Zahl der Modellparameter. Beide Kennzahlen dienen der Identifikation von Beobachtungen, deren Einfluss näher untersucht werden sollte.

Die in der Software implementierten Formeln sind Näherungen und ersetzen keine vollständige Neuschätzung nach Entfernen einer Beobachtung. Für die Interpretation empfiehlt sich die gemeinsame Betrachtung der Residuen, Leverage, Delta-D und Cook-Distanz statt eines isolierten Grenzwerts.

Delta-D:

$$\Delta D_i \approx r_{D,i}^2 + \frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} r_{P,i}^2$$

Cook-Distanz:

$$D_i = \frac{r_{P,i}^2}{p} \frac{h_{ii}}{(1-h_{ii})^2}$$

6 Multikollinearität und VIF

Die sechs geometrischen Messgrößen beschreiben teilweise dieselbe Banknotenform. Deshalb kann zwischen einzelnen Prädiktoren eine Korrelation bestehen. OQM-Stat ergänzt die logistische Regression durch Varianzinflationsfaktoren, die aus den erklärenden Variablen berechnet werden.

Der VIF einer Variablen misst, wie stark ihre lineare Vorhersagbarkeit aus den übrigen Prädiktoren die Varianz eines Regressionskoeffizienten potenziell erhöht. Ein moderater VIF schließt vollständige Separation nicht aus: Multikollinearität und Separation sind unterschiedliche Eigenschaften eines Datensatzes.

7 Anpassungsgüte bei Wiederholungen

OQM-Stat enthält eine zusätzliche Goodness-of-Fit-Routine, die identische Kombinationen aller Prädiktoren zu Gruppen zusammenfasst. Für jede Gruppe werden die Anzahl der Beobachtungen und die Zahl der Ereignisse ermittelt. Aus diesen Häufigkeiten entsteht eine gruppierte Deviance. Die Freiheitsgrade werden als Anzahl unterschiedlicher Prädiktorkombinationen minus Parameterzahl angesetzt.

Die Routine ergänzt die Chi-Quadrat-Näherung um eine Monte-Carlo-Auswertung mit erneuter Anpassung simulierter Stichproben. Bei den Banknoten sind die vollständigen geometrischen Messvektoren nicht als systematische Wiederholungsgruppen angelegt; der gruppierte Test ist deshalb nicht das zentrale Gütemaß dieses Beispiels. Im Artikel wird die Berechnung erklärt, ohne einen nicht belegten Goodness-of-Fit-Wert zu behaupten.

Separation:

$$\max_{i:y_i=0} \eta_i < \min_{i:y_i=1} \eta_i$$

Grouped Deviance:

$$D = 2 \sum_{g=1}^G \left[s_g \log \frac{s_g}{n_g \hat{\pi}_g} + (n_g - s_g) \log \frac{n_g - s_g}{n_g (1 - \hat{\pi}_g)} \right]$$

8 Vollständige Separation mit X6

Wird die Bilddiagonale X6 zusätzlich aufgenommen, lassen sich die Banknotengruppen vollständig durch eine lineare Funktion trennen. Damit kann eine Trennrichtung gefunden werden, in der die Log-Likelihood bei immer größeren Koeffizienten gegen ihren Grenzwert strebt, ohne dass ein endliches Maximum erreicht wird. Reguläre Maximum-Likelihood-Koeffizienten existieren in diesem Fall nicht.

OQM-Stat besitzt hierfür einen gesonderten Programmzweig. Er gibt eine gefundene Trennfunktion, eine Trennregel und eine Kontrolle der Trennung aus. Die Trennkoeffizienten sind keine regulären ML-Schätzwerte; ihre gemeinsame Skalierung ist nicht eindeutig. Das ist ein besonders lehrreiches Beispiel dafür, dass perfekte Klassifikation und reguläre Parameterschätzung verschiedene Ziele sind.

9 Vergleich der beiden Banknotenmodelle

Das Fünf-Merkmals-Modell liefert endliche Parameter und eine vollständige statistische Standardauswertung. Das Sechs-Merkmals-Modell mit X6 führt dagegen zu einer vollständigen Trennung und wird in OQM-Stat als Trennfunktionsproblem behandelt. Für den Vergleich sind daher zwei getrennte Beurteilungsmaßstäbe erforderlich: Schätzbarkeit und Interpretierbarkeit auf der einen, Trennfähigkeit auf der anderen Seite.

Es wäre methodisch falsch, die Trennkoeffizienten des separierten Modells wie gewöhnliche Odds Ratios zu interpretieren. Ebenso wäre es falsch, aus dem Verzicht auf X6 zu schließen, dieses Merkmal sei uninteressant. Gerade seine hohe Trennwirkung macht den Sonderfall statistisch bemerkenswert.

9.1 Fachliche Interpretation der Banknotenbefunde

Die Banknotenuntersuchung ist ein Beispiel für die Verknüpfung physikalischer Messungen mit einer probabilistischen Klassifikation. Die Randmaße X4 und X5 liefern im Fünf-Merkmals-Modell deutliche bedingte Beiträge. Die übrigen Messgrößen vervollständigen die multivariate Beschreibung. Die hohe AUC belegt eine sehr gute Rangtrennung innerhalb der analysierten Stichprobe.

Für die praktische Anwendung bleibt die Unterscheidung zwischen Modellanpassung und externer Vorhersageleistung wesentlich: Die hier berichteten Klassifikationswerte werden anhand derselben Beobachtungen bestimmt, die zur Schätzung verwendet wurden. Eine unabhängige Validierungsstichprobe würde die Übertragbarkeit auf weitere Banknoten prüfen.

Logistische Regression für abhängige Variable Falschgeld								
Modellübersicht		Modelltest						
Beobachtungen	205	Bezeichner	Deviance	FG	p-Wert			
Fehlend/ungültig	0	Null	284.068381	204				
Iterationen	11	Regression	265.969217	5	0.000000			
Log-Likelihood	-9.049582	Residual	18.099164	199				
Null-Log-Likelihood	-142.034190	Goodness of Fit						
McFadden R²	0.936286	GoF nicht möglich						
AIC	30.099164	Keine X-Wiederholungen						
BIC	50.037223							
Koeffizienten								
Variable	Beta	SE	z	p	Odds Ratio	KI 0.025	KI 0.975	VIF
Konstante	-483.346589	408.945655	-1.181934	0.237232				
x1	0.337183	1.433304	0.235249	0.814016	1.400995	0.084412	23.252352	1.233741
x2	-1.471665	4.201012	-0.350312	0.726105	0.229543	0.000061	864.513770	2.437645
x3	3.657605	3.334953	1.096749	0.272751	38.768397	0.056203	26742.075028	2.628356
x4	5.414241	1.923498	2.814788	0.004881	224.581971	5.177143	9742.257657	1.491341
x5	7.260876	2.213489	3.280285	0.001037	1423.503577	18.588012	109014.475598	1.273783

Abbildung 2: Originalausgabe von OQM-Stat für die Banknotenanalyse.

9.2 Hinweise zur Ergebnisdarstellung in OQM-Stat

Die Modellübersicht stellt Fallzahl, Iterationen, Log-Likelihood, McFadden-R² sowie AIC und BIC bereit. Daneben folgt der Likelihood-Ratio-Modelltest. Die Koeffiziententabelle zeigt Koeffizien-

ten, Standardfehler, Wald-z, p-Werte, Odds Ratios, Konfidenzintervalle und VIF. Die Beobachtungstabelle enthält Wahrscheinlichkeit, Klassifikation, Residuen und Einflussdiagnostik. Die Klassifikationstabelle für den Cutoff 0,5 und die ROC-Auswertung ergänzen die Parameterschätzung um entscheidungsbezogene Informationen. Die Ausgabe ist damit bewusst mehrdimensional: Modellfit, Variableneffekte, Klassifikation und Einzelfalldiagnose werden getrennt berichtet.

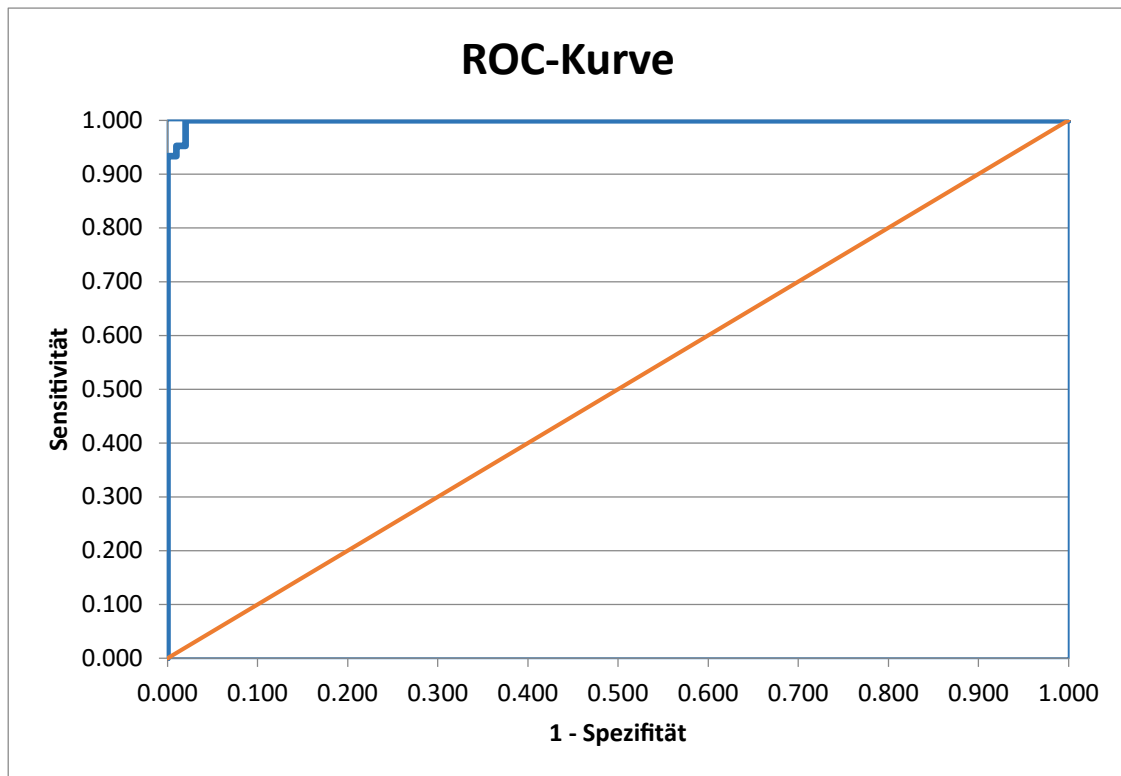


Abbildung 3: ROC Kurve von OQM-Stat für die Banknotenklassifikation.

10 Zusammenfassung

Die logistische Regression ist für binäre Zielgrößen ein gut interpretierbares Modell, sofern endliche Parameterschätzungen vorliegen. Im Banknotenbeispiel zeigt die Analyse mit X1 bis X5 eine sehr ausgeprägte Trennung zwischen echten und gefälschten Banknoten. Die ergänzende ROC- und Residuenanalyse erschließt sowohl die Klassifikationsleistung als auch die Struktur einzelner Beobachtungen. Die Einbeziehung von X6 demonstriert die Grenze regulärer Maximum-Likelihood-Schätzung bei vollständiger Separation. Die gesonderte Behandlung dieses Falls in OQM-Stat ermöglicht eine sachgerechte Interpretation, ohne eine Trennfunktion fälschlich als gewöhnliches Logit-Modell auszugeben.

11 Literatur und methodische Einordnung

Agresti, A.: An Introduction to Categorical Data Analysis. Wiley.
Hosmer, D. W., Lemeshow, S., Sturdivant, R. X.: Applied Logistic Regression. Wiley.
McCullagh, P., Nelder, J. A.: Generalized Linear Models. Chapman & Hall.
Heinze, G., Schemper, M.: A solution to the problem of separation in logistic regression. Statistics in Medicine (2002).
OQM-Stat 6.1.2: bereitgestellter VBA-Quelltext zu Logit_Anal, VT_LogitFit und VT_Logit_GoF.